Exercice 1 *3 points*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1;10] par :
$f(x)=x^2-14x+15+20\ln(x)$

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;10] on a :
$f'(x)=\frac{2x^2-14x+20}{x}$

2. Construire en le justifiant le tableau de variation de la fonction sur l'intervalle [1;10].

3. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=3$ dans l'intervalle [1;10].

CORRECTION

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;10], $f(x)=x^2-14x+15+20\ln(x)$

1. Pour tout nombre réel x strictement positif : $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$

f est dérivable sur [1;10], $f'(x)=2x-14+\frac{20}{x}=\frac{2x^2-14x+20}{x}$

2. x appartient à l'intervalle [1;10] donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x)=2x^2-14x+20$
N(x) est un trinôme du second degré.
$\Delta=14^2-4\times20\times2=196-160=36=6^2$
$x'=\frac{14-6}{4}=\frac{8}{4}=2 \qquad x''=\frac{14+6}{4}=\frac{20}{4}=5$
Le coefficient de x^2 est 2 > 0.

x	1		2		5		10
Signe de N(x)		–	0	+	0	–	

Tableau de variations de f

x	1		2		5		10
Signe de f '(x)		+	0	–	0	+	
Variations de f(x)	2	↗	f(2)	↘	f(5)	↗	f(10)

$f(1)=1-14+15+0=2$
$f(2)=4-28+15+20\ln(2)=4{,}9$ à 10^{-1} près
$f(5)=25-70+15+20\ln(5)=2{,}2$ à 10^{-1} près
$f(10)=100-140+15+20\ln(10)=21{,}1$ à 10^{-1} près

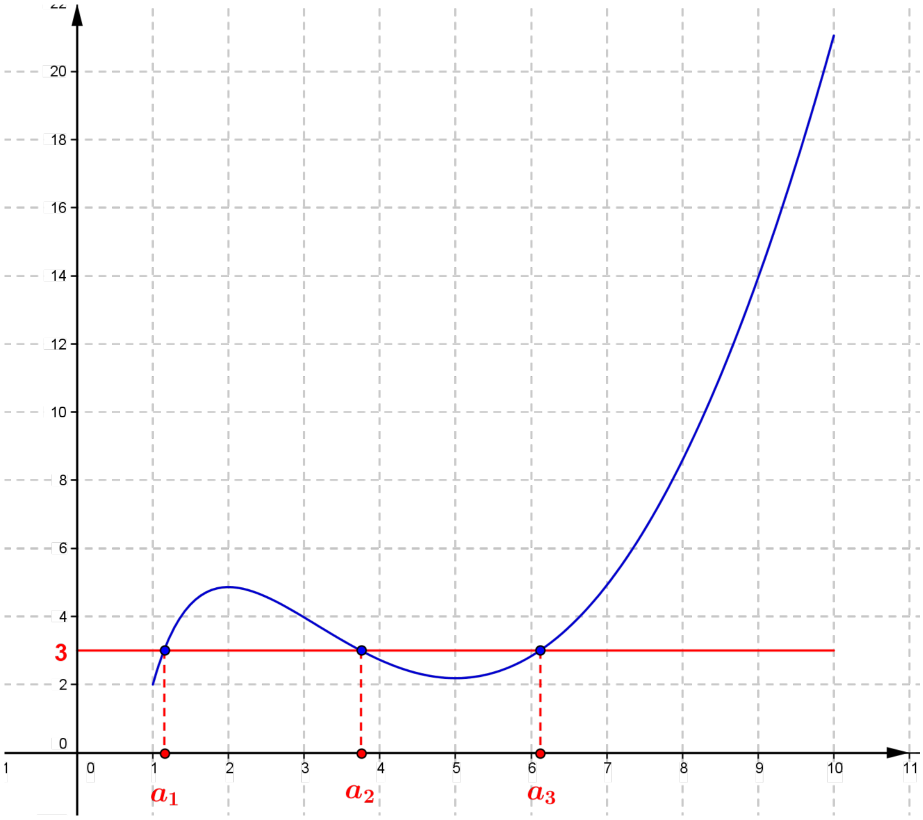
3. f est continue et strictement croissante sur [1;2], f(1) < 3 < f(2) donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 3 admet un unique antécédent a_1 par f appartenant à l'ntervalle [1;2].

. f est continue est strictement décrroissante sur [2;5], f(5) < 3 < f(2) donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 3 admet un unique antécédent a_2 par f appartenant à l'intervalle [2;5].

. f est continue et strictement croissante sur [5;10], f(5) < 3 < f(10) donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 3 admet un unique antécéden t a_3 par f appartenant à l'intervalle [5;10].

<u>Conclusion</u>
L'équation $f(x)=3$ admet trois solutions : a_1 ; a_2 et a_3 dans l'intervalle [1;10].

<u>Remarque</u>
On peut vérifier ce résultat en utilisant la calculatrice en traçant la courbe représentative de f et la droite d'équation : y = 3.


3
a_1
a_2
a_3