Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le premier janvier 2014, Monica ouvre un livret d'épargne sur lequel elle dépose 6000 euros.
Elle décide de verser 900 euros sur ce livret chaque premier janvier à partir de 2015 jusqu'à atteindre le plafond autorisé de 19125 euros
On suppose dans tout cet exercice que le taux de rénumération du livret reste fixé à 2,25 % par an et que les intérêts sont versés sur le livret le premier janvier de chaque année.

Première partie

1. Calculer le montant des intérêts pour l'année 2014 et montrer que Monica disposera d'un montant de 7035 euros sur son livret le premier janvier 2015.

2. On note M_n le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année 2014+n
On a donc $M_0=6000$ et $M_1=7035$.
Montrer que pour tout entier naturel n : $M_{n+1}=1{,}0225\,M_n+900$.

Deuxième partie

Monica souhaite savoir en quelle année le montant de son livret atteindra le plafond de 19125 euros.

1. Première méthode
On considère la suite (G_n) définie pour tout entier naturel n, par $G_n=M_n+40000$.

a. Montrer que suite (G_n) est une suite géométrique de raison 1,0225.
On précisera le premier terme

b. Donner l'expression de G_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $M_n=46000\times1{,}0225^n-40000$.

c. Déduire de l'expression de M_n obtenue en b l'année à partir de laquelle le plafond de 19125 euros sera atteint.

2. Deuxième partie

L'algorithme ci-dessous permet de déterminer l'année à partir de laquelle le plafond sera atteint :

```
Ligne
1     Variables :        MONTANT est un réel
2                        ANNEE est un entier
3
4     Initialisation :   Affecter à MONTANT la valeur 6000
5                        Affecter à ANNEE la valeur 2014
6
7     Traitement :       Tant que MONTANT < 19125
8                           Affecter à MONTANT la valeur 1,0225xMONTANT+900
9                           Affecter à  ANNEE la valeur ANNEE+1
10
11    Sortie :           Afficher « le plafond du livret sera atteint en . . . »
12                       Afficher  ANNEE
```

a. Il suffit de modifier deux lignes de cet algorithme pour qu'il détermine l'année à partir de laquelle le plafond est atteint pour un montant versé initialement de 5 000 euros et des versements annuels de 1000 euros.
Indiquez sur votre copie les numéros des lignes et les modifications proposées.

b. Proposez une modification de la boucle conditionnelle pour que l'algorithme affiche également à l'écran le montant disponible au premier janvier de chaque année.

CORRECTION

Première partie

1. Le taux de rénumération du livret est de 2,25 % par an.
Le premier janvier 2014 Monica dépose 6000€ sur son livret, le montant des intérêts pour l'année 2014 est : $\frac{2{,}25}{100}\times 6000=135\,€$.
Monica disposera au 1er janvier 2015 de : $6000+900+135$ = **7035 €.**

2. $M_0=6000$ et $M_1=7035$
Pour tout entier naturel n
M_{n+1} est le montant disponible au 1er janvier 2014+n+1
M_{n+1} est égal à M_n (montant disponible au 1er janvier 2014+n) augmenté des intérêts de l'année 2014+n $\left(\frac{2{,}25}{100}\times M_n\right)$ et de 900.
Donc $M_{n+1}=M_n+\frac{2{,}25}{100}\times M_n+900=\left(1+\frac{2{,}25}{100}\right)\times M_n+900=1{,}0225\times M_n+900$

Deuxième partie

1. 1ère <u>méthode :</u>
Pour tout entier naturel n : $G_n=M_n+40000$ donc $M_n=G_n-40000$.

a. Pour tout entier naturel n.
$G_{n+1}=M_{n+1}+40000=(1{,}0225\,M_n+900)+40000=1{,}0225\,M_n+40900$
$G_{n+1}=1{,}0225(G_n-40000)+40900=1{,}0225\,G_n-1{,}0225\times 40000+40900$
$G_{n+1}=1{,}0225\,G_n-40900+40900=1{,}0225\,G_n$
<u>Conclusion</u>
(G_n) est la suite géométrique de raison **q = 1,0225**
et de premier terme $G_0=40000+6000$ = **46000.**

b. Pour tout entier naturel n, $G_n=G_0\times q^n$
$G_n=46000\times 1{,}0225^n$
et $M_n=G_n-40000$ donc $M_n=46000\times 1{,}0225^n-40000$

c. On doit résoudre l'inéquation : $46000\times 1{,}0225^n-4000\geqslant 19125$
où l'inconnue est n (entier naturel).
$\Leftrightarrow 46000\times 1{,}0225^n\geqslant 59125\Leftrightarrow 1{,}0225^n\geqslant\frac{59125}{46000}$
ln est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$
$\ln(1{,}0225^n)\geqslant\ln\left(\frac{59125}{46000}\right)\Leftrightarrow n\times\ln(1{,}0225)\geqslant\ln\left(\frac{59125}{46000}\right)$
Or 1 < 1,0225 donc 0 < ln(1,0225)
$\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln\left(\frac{59125}{46000}\right)}{\ln(1{,}0225)}$
En utilisant la calculatrice on obtient : $n\geqslant 11{,}28$
n est un entier naturel donc la plus petite valeur de n solution de l'inéquation est : **n = 12 ?**
Au 1er janvier 2014+12 = **2026** le plafond sera atteint.

2. 2ème <u>méthode</u>

a. *ligne 4 :* **Initialisation :** Affecter à Montant la valeur **5000**
ligne 8 : **Traitement :** Affecter à MONTANT la valeur 1,0225xMONTANT + **1000**

b. Dans la boucle conditionnelle
ligne 10 : Afficher **ANNEE**
Afficher **MONTANT**