

Exercice 5

5 points

Les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis au dix millième, ou sous forme de pourcentage arrondis à 0,01 %.

1. Le lendemain d'une épreuve de mathématiques au baccalauréat, on corrige un échantillon de 160 copies choisies au hasard parmi l'ensemble des copies et on observe que 78 copies ont obtenu une note supérieure ou égale à 10.
 - a. Déterminer la proportion des copies de l'échantillon ayant obtenu une note supérieure ou égale à 10.
 - b. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion des copies qui obtiendront une note supérieure ou égale à 10 dans l'ensemble des copies.
 - c. Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % d'amplitude inférieure à 0,04 ?
2. A l'issue du premier groupe d'épreuves on désigne par X la variable aléatoire qui, à un candidat choisi au hasard parmi l'ensemble des candidats, associe sa moyenne générale. Un correcteur propose de considérer que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne 12,5 et d'écart type 2.
 - a. Si ce correcteur à raison, quel intervalle centré en 10,5 devrait contenir 95 % des moyennes des candidats ?
 - b. A l'aide de la calculatrice ou de la table fournie en annexe, calculer $P(X > 12)$.
 - c. Lors des délibérations de jury à l'issue du premier groupe d'épreuves, les candidats ayant obtenu une supérieure ou égale à 10 sont déclarés admis. Il est aussi d'usage, par exemple, lorsqu'un candidat a obtenu une moyenne inférieure mais très proche de 10 et lorsque le dossier de ce candidat met en avant la qualité de son travail au cours de l'année, de le déclarer admis et de porter à 10 sa moyenne.

Le graphique figurant en annexe 2 permet de visualiser les notes moyennes d'environ 330 000 candidats à l'issue des délibérations des jurys du premier groupe d'épreuves du baccalauréat 2001.

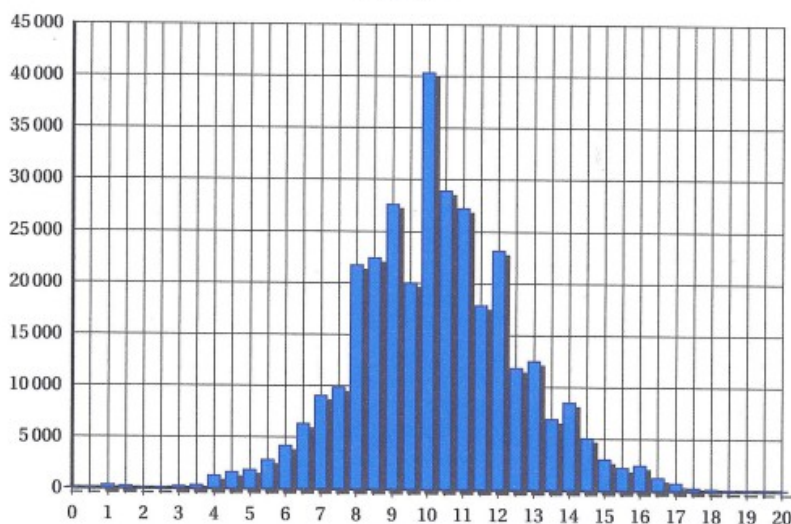
Commenter la forme du graphique et ses éventuelles irrégularités.

Annexe 1

t	P(X≤t)	t	P(X≤t)	t	P(X≤t)
10	0.4013	11	0.5987	12	0.7734
10.1	0.4207	11.1	0.6179	12.1	0.7881
10.2	0.4404	11.2	0.6368	12.2	0.8023
10.3	0.4602	11.3	0.6554	12.3	0.8159
10.4	0.4801	11.4	0.6736	12.4	0.8289
10.5	0.5000	11.5	0.6915	12.5	0.8413
10.6	0.5199	11.6	0.7088	12.6	0.8531
10.7	0.5398	11.7	0.7257	12.7	0.8643
10.8	0.5596	11.8	0.7422	12.8	0.8749
10.9	0.5793	11.9	0.7580	12.9	0.8849

Extrait de la table de la loi normale pour $\mu=10,5$ et $\sigma=2$

Annexe 2



(Source : Direction de la Programmation et du Développement, Ministère de la Jeunesse de l'Éducation nationale et de la Recherche, 2002)

CORRECTION

1.a. f est la proportion des copies de l'échantillon ayant obtenu une note supérieure ou égale à 10 :

$$f = \frac{78}{160} = \mathbf{0,4875}$$

b. L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion des copies qui obtiendront une note supérieure ou égale à 10 pour un échantillon de taille n est :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I_{160} = \left[0,4875 - \frac{1}{\sqrt{160}} ; 0,4875 + \frac{1}{\sqrt{160}} \right] = \mathbf{[0,4084; 0,5666]}.$$

c. L'amplitude de l'intervalle de confiance I_n est : $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\text{On veut : } \frac{2}{\sqrt{n}} < 0,04 \Leftrightarrow \frac{2}{0,04} < \sqrt{n} \Leftrightarrow 50 < \sqrt{n}$$

on obtient : **2500 < n**.

2.a. Si X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ alors :

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,95.$$

$$\text{Donc } P(10,5 - 2 \times 2 \leq X \leq 10,5 + 2 \times 2) = P(6,5 \leq X \leq 14,5) = 0,95$$

Et l'intervalle **[6,5; 14,5]** devrait contenir 95 % des moyennes des candidats.

b. $P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12)$

En utilisant la table donnée en annexe :

$$P(X > 12) = 1 - 0,7734 = \mathbf{0,2266}$$

c. On suppose que la répartition des notes suit une loi normale.

On peut remarquer sur le graphique :

• **Au seuil de 8**

Les notes légèrement inférieure à 8 sont sous estimées.

Les notes légèrement supérieures à 8 sont sur estimées.

Aux délibérations du jury, on « augmente » les notes de certains candidats (ayant une moyenne légèrement inférieure à 8) pour les autoriser à passer l'oral de contrôle.

• **Au seuil de 10**

Les notes légèrement inférieures à 10 sont sous estimées.

Les notes légèrement supérieures à 10 sont sur estimées.

Aux délibérations du jury, on « augmente » les notes de certains candidats (ayant une moyenne légèrement inférieure à 10) pour les recevoir à l'examen.

• **Aux seuils de 12 ; 14 ; 16**

Mêmes remarques pour l'obtention des mentions.