Exercice 1 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Une réponse juste rapporte un point;une fausse réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Reporter sur le sujet le numéro de la question ainsi que la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\,e^{-x}$

1. L'image $f(\ln(2))$ de ln(2) par f est égale à :

a. ln(2) **b.** -2ln(2)

c. 2ln(2) **d.** $\frac{1}{2}\ln(2)$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel x, on a :

a. $f'(x)=e^{-x}$ **b.** $f'(x)=-e^{-x}$

c. $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ **d.** $f'(x)=(1+x)e^{-x}$

3. L'équation réduite de la tangenteà la courbe de la fonctionf au point d'abscisse 0 est :

a. $y=2x$ **b.** $y=x-1$

c. $y=x$ **d.** $y=2x-1$

4. La fonction f est :

a. concave sur [0;1] **b.** concave sur $[0;+\infty[$

c. convexe sur $[0;+\infty[$ **d.** convexe sur [0;1]

5. L'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ est égale à :

a. $e-5$ **b.** 1

c. $\frac{e-2}{e}$ **d.** 5

CORRECTION

1. **Réponse : d** $\frac{1}{2}\ln(2)$

Justifications non demandées

$$f(\ln(2))=(\ln(2))e^{-\ln(2)}=\frac{\ln(2)}{e^{\ln(2)}}=\frac{\ln(2)}{2}=\frac{1}{2}\ln(2)$$

2. **Réponse : c** $(1-x)e^{-x}$

Justifications non demandées

$$f'(x)=(xe^{-x})'=1\times e^{-x}+x\times(-e^{-x})=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

3. **Réponse : c** $y=x$

Justifications non demandées

$f(0)=0$ et $f'(0)=1=(1-0)e^{0}$

L'équation de la tangente au point, d'abscisse 0, à la courbe est :

$y-0=1\times(x-0)$ soit $y=x$

4. **Réponse : a** f est concave sur [0;1]

Justifications non demandées

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f''(x)=[(1-x)e^{-x}]'=-1\times e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=-e^{-x}+(-1+x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

Le signe de $f''(x)$ est le signe de : $x-2$.

Pour tout nombre réel x appartenant à à l'intervalle [0;1] on a : $f''(x)<0$ donc f est concave sur [0;1].

Remarque

f'' n'a pas un signe constant sur $[0;+\infty[$.

5. **Réponse : c** $\frac{e-2}{e}$

Justifications non demandées

Remarques

. f est continue et positive sur [0;1] donc $\int_0^1 f(x)\,dx$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

. $e-5<0$ donc la réponse a est fausse.

. $\frac{e-2}{e}=1-\frac{2}{e}<1$

$1^{\text{ère}}$ méthode (comparaison d'intégrales)

$f'(x)=(1-x)e^{-x}$ Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1] on a : $f'(x)\geqslant 0$

Tableau de variations de f

x	0	1
f '(x)	+	0
f(x)	0 $\nearrow$	$\frac{1}{e}$

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0;1] :

$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{e}$ donc $0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{e}\,dx$

$h(x) = \frac{1}{e}$ $H(x) = \frac{1}{e}x$ H est une primitive de h sur [0;1]

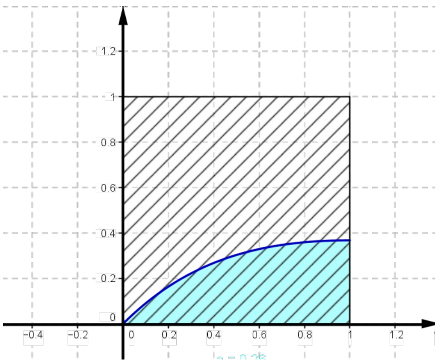
$\int_0^1 f(x)\,dx = H(1) - H(0) = \frac{1}{e} \times 1 - 0 = \frac{1}{e}$

$\frac{1}{e} < 1 < 5$ donc les réponses b et d sontfausses.

La réponse exacte et donc c.

2[ème] méthode (lecture graphique)

On utilise la courbe représentative de f obtenue sur la calculatrice.



$\int_0^1 f(x)\,dx$ est l'aire de la partie de plan colorée en bleu.

L'unité d'aire est l'aire du carré hachuré.

Donc $\int_0^1 f(x)\,dx < 1$

même conclusion.

3[ème] Méthode (calculatrice)

On utilise la calculatrice pour donner une valeur approchée de l'intégrale : 0,26 < 1.

Même conclusion.