

Exercice 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points

Les parties A et B sont indépendantes

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.

Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90 % du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.

Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.

On observe à partir de 2010 que chaque année, 15 % des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10 % des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A. Pour tout entier naturel n , on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année 2010+n, et b_n , la probabilité pour que son fournisseur d'accès en 2010+n soit l'entreprise B.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année 2010+n et on a ainsi $a_0 = 0,9$; $b_0 = 0,1$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
- 2.a. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
 - b. Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $\begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.
 - c. Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

Partie B

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par portes-clés distribué.

A la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.

On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Ecrire un système traduisant cette situation
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et X et T des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

CORRECTION

Partie A

1. Le graphe a deux sommets A et B.

A : l'internaute choisit l'entreprise A

B : L'internaute choisit l'entreprise B

A partir de 2010, chaque année, 15 % des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B (donc 85 % des clients de l'entreprise A restent des clients de l'entreprise A).

Conséquences

Le poids de l'arête AB est 0,15.

Le poids de l'arête AA est 0,85.

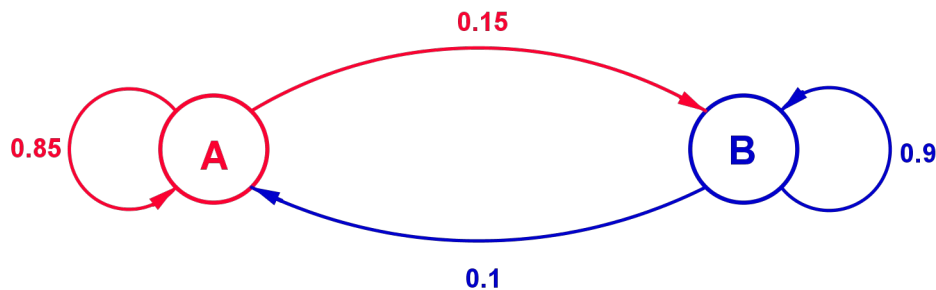
- A partir de 2010, chaque année, 10 % des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A (donc 90 % des clients de l'entreprise B restent des clients de l'entreprise B).

Conséquences

Le poids de l'arête BA est 0,1.

Le poids de l'arête BB est 0,9.

- On obtient le graphe pondéré suivant :



2. Dans la partie A on utilise les matrices lignes (pour l'état probabiliste).

- a. On classe les sommets dans l'ordre alphabétique.

La matrice de transition du graphe probabiliste est une matrice carrée 2x2.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

m_{11} est le poids de l'arête AA $m_{11} = 0,85$

m_{12} est le poids de l'arête AB $m_{12} = 0,15$

m_{21} est le poids de l'arête BA $m_{21} = 0,1$

m_{22} est le poids de l'arête BB $m_{22} = 0,9$

$$M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

- b. Pour tout entier naturel n, on a :

$$P_{n+1} = P_n M \quad \text{et} \quad P_n = P_0 M^n$$

$$P_0 = (0,9 \quad 0,1) \quad \text{et} \quad P_n = (a_n \quad b_n)$$

2013 = 2010 + 3 donc l'état probabiliste en 2013 est P_3 .

$$\text{Or } P_3 = P_0 M^3$$

$$\text{En utilisant la calculatrice on obtient : } M^3 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,23 & 0,77 \end{pmatrix}$$

$$P_0 M^3 = (0,9 \quad 0,1) \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,23 & 0,77 \end{pmatrix} = (0,9 \times 0,65 + 0,1 \times 0,23 \quad 0,9 \times 0,35 + 0,1 \times 0,77)$$

$$P_0 M^3 = \begin{pmatrix} 0,608 & 0,392 \end{pmatrix}$$

On arrondit au centième

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}.$$

c. $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ est l'état stable si et seulement si $PM = P$ et $a + b = 1$.

$$PM = P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,85a + 0,1b & 0,15a + 0,9b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,85a + 0,1b = a \\ 0,15a + 0,9b = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,15a + 0,1b = 0 \\ 0,15a - 0,1b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,15a - 0,1b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} PM = P \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,15a - 0,1b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5a = b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

On obtient $2,5a = 1$ soit $a = \frac{1}{2,5} = 0,4$ et $b = 0,6$

Conclusion

L'état stable est $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

Interprétation

Dans un avenir lointain, l'entreprise A ne possédera que 40 % du marché et l'entreprise B possédera 60 % du marché.

Partie B

- s est le nombre de stylos distribués (s est un entier naturel)
c est le nombre de porte-clés distribués (c est un entier naturel)
 $s + c = 550$ (l'entreprise A a distribué 550 objets)
 $0,8s + 1,2c = 540$ (le coût pour l'entreprise est 540 €)

On obtient le système :
$$\begin{cases} s + c = 550 \\ 0,8s + 1,2c = 540 \end{cases}$$

- Dans la partie B on utilise les matrices colonnes.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 550 \\ 540 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} s + c = 550 \\ 0,8s + 1,2c = 540 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 550 \\ 540 \end{pmatrix}$$

- On obtient la matrice inverse de R en utilisant la calculatrice

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2,5 \\ -2 & 2,5 \end{pmatrix}$$

$$R \times X = T \Leftrightarrow X = R^{-1} \times T$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2,5 \\ -2 & 2,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 550 \\ 540 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 550 - 2,5 \times 540 \\ -2 \times 550 + 2,5 \times 540 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \end{pmatrix}$$

donc **s = 300 et c = 250**

L'entreprise B a distribué 300 stylos et 250 porte-clés.