

Exercice 3

5 points

La production des perles de culture de Tahiti est une activité économique importante pour la polynésie française.

Les montants réalisés à l'exportation des produits perliers de 2008 à 2011 sont donnés dans le tableau suivant, en milliers d'euros ;

Années	2008	2009	2010	2011
Valeurs brutes des produits perliers (en milliers d'euros)	81 295	66 052	64 690	63 182

Source:ISPF(institut de statistique de polynésie Française)

- Montrer que le taux d'évolution annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers Polynésie entre 2008 et 2011 est -8,06 arrondi au centième.

On admet pour la suite de l'exercice, que la production continuera de baisser de 8 % par an à partir de 2011.

- On considère l'algorithme suivant :

Entrée : Saisir un nombre positif P
Initialisation : Affecter la valeur 0 à la variable N
Affecter la valeur 63182 à la variable U
Traitement : Tant que $U > P$ faire
Affecter la valeur $N+1$ à N
Affecter la valeur $0,92 \times U$ à U
Fin Tant que
Affecter la valeur $N+2011$ à N
Sortie : Afficher N

Si on saisit $P = 50000$ en entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de la production de perles.

- Pour prévoir les montants réalisés à l'exportation des perles de Tahiti, on modélise la situation par une suite (u_n) . on note u_0 le montant en 2011, en milliers d'euros, u_n , le montant en $2011+n$, en milliers d'euros. On a donc $u_0 = 63182$ et on suppose que la valeur baisse tous les ans de 8 %.
 - Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
 - Avec ce modèle, quel montant peut-on prévoir pour l'exportation des produits perliers de polynésie Française en 2016 ? On arrondira le résultat au millier d'euros.
- Calculer le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle à partir de 2011 (comprise) jusqu'à 2020 (comprise). On donnera une valeur approchée au millier d'euros.

CORRECTION

1. t est le taux d'évolution annuel moyen entre 2008 et 2011 (ici le taux est négatif).

En 2008 : 81295

En 2009 : $81295 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$

En 2010 : $81295 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2$

En 2011 : $81295 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^3$

Par lecture dans le tableau, on obtient :

$$63182 = 81295 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^3$$

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 = \frac{63182}{81295}$$

$$1 + \frac{t}{100} = \sqrt[3]{\frac{63182}{81295}}$$

En utilisant la calculatrice

$$1 + \frac{t}{100} \simeq 0,9194$$

$$\frac{t}{100} = 0,9194 - 1 = -0,0806$$

$$t = -8,06 \%$$

2. pour la 1^{ère} boucle :

$$N = 1$$

$$U = 63182 \times 0,92 = 58127,44$$

donc $U > 50000$

- pour la 2^{ème} boucle :

$$N = 2$$

$$U = 58127,44 \times 0,92 = 53477,24$$

donc $U > 50000$

- pour la 3^{ème} boucle :

$$N = 3$$

$$U = 53477,24 \times 0,92 = 49199,07$$

donc $U < 50000$

Fin Tant que

$$N = 2011 + 3 = 2014$$

L'algorithme affiche : **2014**

2014 est la première année pour laquelle le montant réalisé à l'exportation des produits perliers est inférieur à 50000 (milliers d'euros).

- 3.a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{8}{100} \times u_n = \left(1 - \frac{8}{100}\right) u_n = 0,92 u_n$$

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 63182$ et de raison $q = 0,92$.

- b. Pour tout entier naturel n

$$u_n = u_0 \times q^n = 63182 \times 0,92^n$$

- c. $2011 + 5 = 2016$

$$u_5 = 63182 \times 0,92^5 \simeq \mathbf{41642}$$

Le montant réalisé à l'exportation des produits perliers en 2016 sera : 41642 (milliers d'euros).

4. $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$

s est la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 63182$ et de raison $q = 0,92$.

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 63182 \times \frac{1 - 0,92^{10}}{1 - 0,92}$$

En utilisant la calculatrice on obtient :

$$S = 446706$$

Le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle à partir de l'année 2011 (comprise) jusqu'à l'année 2020 (comprise) est : 446 706 (milliers d'euros).