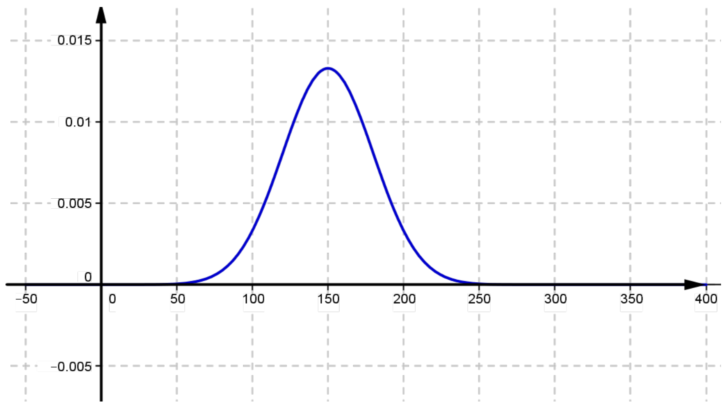
Exercice 4 5 points

On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2 de la planète.

A. Etude de la zone 1



On note X la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm. Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma=30$; La courbe dela densité de probabilité associée à X est représentée ci-dessus.

1. Par lecture graphique, donner la valeurde μ.

2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.

3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.
On pêche un poisson de l'espèce de zone 1. Donner la probabilité arrondie à 10^{-2} de pêcher un poisson adulte.

4. On considère un nombre k strictement plus grand que la moyenne μ.
Est-il vrai que $P(X<k)<0,5$? Justifier.

B. Etude de la zone 2

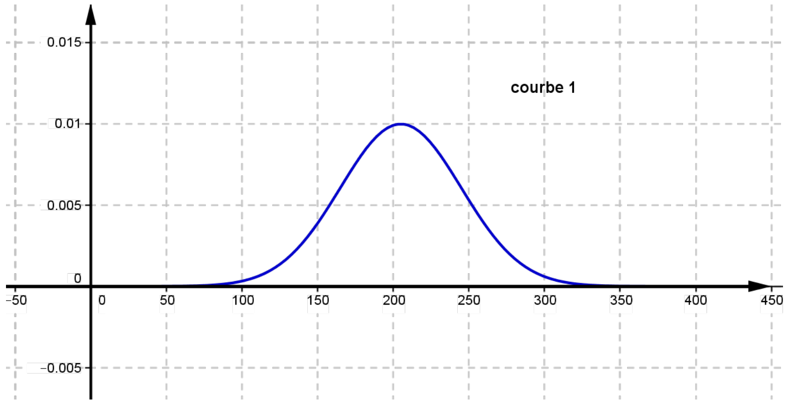
1. Certains poissons de la zone 2 sont atteints d'une maladie. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 poissons de cette espèce dans la zone 2 et on constate que 15 poissons sont malades.

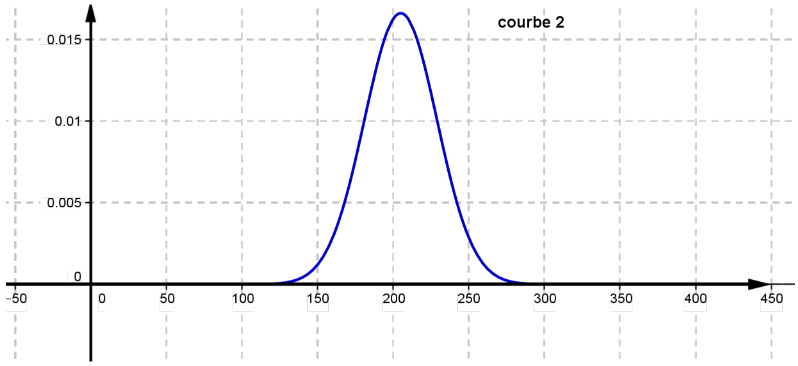
a. Calculer la fréquence f de poissons malades dans l'échantillon.

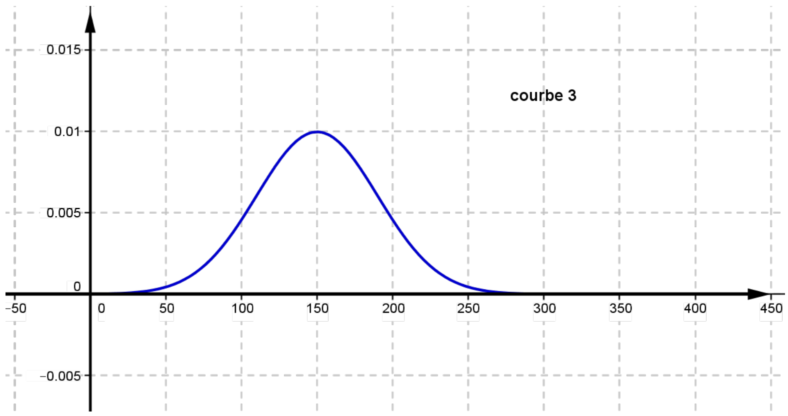
b. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de 95 %, de la proportion p de poissons malades dans la zone 2 ; on arrondira les bornes au millième.

2. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu'=205$ et d'écart type $\sigma'=40$.
En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma=30$, Dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Justifier la réponse.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés







Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

A. Etude de la zone A

1. La courbe de densité est symétriaque par rapport à la droite d'équation $x=150$ donc **μ = 150.**

2. X suit la loi normale de moyenne μ = 150 et d'écart type $\sigma=30$.

. On peut utiliser la calculatrice et on obtient directement : $P(150\leqslant X\leqslant 201)$ = **0,48** (arrondi à 10^{-2}).

. On doit connaître le résultat suivant :
Si X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ alors $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0{,}954$
et $P(\mu\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times 0{,}954=0{,}477=0{,}48$ (arrondi à 10^{-2})
donc $P(150\leqslant X\leqslant 150+2\times 30)$ = **0,48** (arrondi à 10^{-2}).

3. On peut utiliser la calculatrice et on obtient directement : $P(120\leqslant X)$ = **0,84** (arrondi à 10^{-2}).

. On doit connaître les résultats suivants :
$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0{,}683$ et $P(X\leqslant\mu-\sigma)=P(\mu+\sigma\leq X)=\frac{1}{2}\times(1-0{,}683)=0{,}1635=0{,}16$
(arrondi à 10^{-2}) et $P(\mu-\sigma\leqslant X)=1-P(X\leqslant\mu-\sigma)=1-0{,}16=0{,}84$.
donc $P(150-30\leqslant X)$ = **0,84** (arrondi à 10^{-2}).

4. **L'affirmation est fausse**
car on a $P(X\leqslant\mu)=0{,}5$ et si $\mu<$ k alors $P(X\leqslant k)=P(X\leqslant\mu)+P(\mu\leqslant X\leqslant k)$ or $P(\mu\leqslant X\leqslant k)>0$
donc $P(X\leqslant k)>0{,}5$.

B. Etude de la zone 2

1.a. $f=\frac{15}{50}=0{,}3$

b. L'intervalle de confiance au niveau de 95 % de la population p de poissons malzdes est :
$I=\left[f-\frac{1}{\sqrt{50}};f+\frac{1}{\sqrt{50}}\right]$ on a $0{,}141<\frac{1}{\sqrt{50}}<0{,}142$
$I=[0{,}3-0{,}142;0{,}3-0{,}41]=[0{,}158;0{,}441]$

2. On élimine la courbe 3, car elle n'est pas symétrique par rapport à la droite d'équation $x=205$.

. Le maximum de la fonction densité est : $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (c'est à dire $\frac{K}{\sigma}$ avec K constante),obtenu pour $x=\mu$.

. Pour la courbe de la zone 1, le maximum est M, par lecture graphique on a : $0{,}011<M<0{,}015$.

. Pour la courbe 1, le maximum est M', par lecture graphique on a : $M'\simeq 0{,}01$.

. Pour la courbe 2 le maximum est M'' , par lecture graphique on a : $0{,}015<M''$.

. L'écart type passe de 30 à 40 donc la valeur du maximum doit être inférieure à celui de la courbe de la zone 1.

<u>Conclusion</u>
La courbe recherchée est la courbe 1.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés