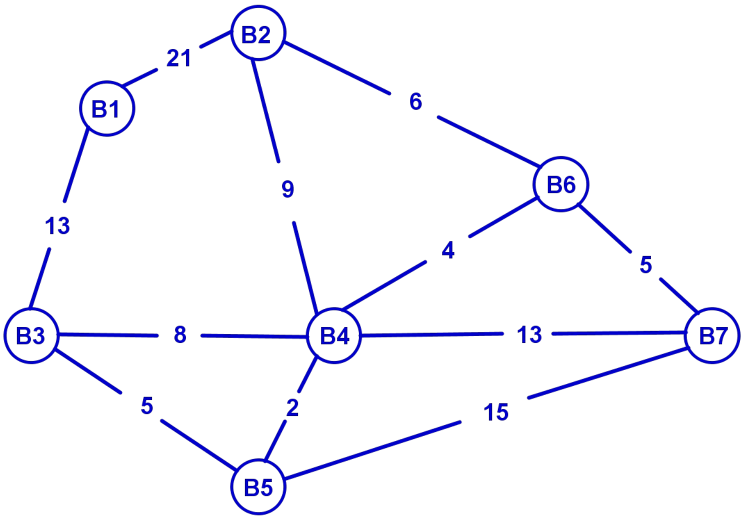
Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
Un club sportif organise une course d'orientation. Sept postes de contrôles (appelés balises) sont prévus. Les sept balises notées B1 ; B2 ; . . . ; B7 sont représentés sur le graphe ci-dessous. Les arêtes du graphe représentent les chemins possibles entre les balises et sur chaque arête est indiqué le temps de parcours estimé en minutes.



1.a. Le graphe est-il connexe ? Justifier la réponse.
b. Existe-t-il un parcours qui permet de revenir à une balise de départ en passant une et une seule fois par tous les chemins ? Justifier la réponse.
c. Existe-t-il un parcorurs qui permet de relier deux balises différentes en passant une et une seule fois par tous les chemins ?

2. Les organisateurs décident de situer le départ à la balise B1 et l'arrivée à la balise B7. Chaque participant doit rallier la balise B7 en un minimum de temps. Il ne sont pas tenus à emprunter tous les chemins.
Quelle est la durée minimale du parcours possible et quel est ce parcours ?
Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme.

Partie B

Depuis l'année 2011, ce club sportif propose à ses licenciés une assurance spécifique. La première année, 80 % des licenciés y ont adhéré. En 2012, 70 % des licenciés ayant adhéré en 2011 ont con-servé cette assurance et 60 % de ceux n'ayant pas adhéré en 2011 ont adhéré en 2012.
En supposant que cette évolution se maintienne, le club sportif souhaite savoir quel pourcentage de licenciés adhèrera à dette assurance à plus long terme.
On note :
A « le licencié est assuré »
B « le licencié n'est pas assuré ».
Pour tout entier n non nul, l'état probabiliste du nombre d'assurés l'année 2011+n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ où x_n désigne la probabilité pour un licentié d'être assuré l'année 2011+n.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.

3. En remarquant que $P_0=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\end{pmatrix}$, déterminer P_1. Interpréter ce résultat.

4. Le club sportif maintiendra son offre d'assurance spécifique si le nombre d'assurés reste supérieur à 55 %.
L'évolution prévue lui permet-elle d'envisager le maintien de son offre à long terme ?

CORRECTION

Partie A

1.a. Le graphe est connexe car toutes les paires de sommets sont reliés par au moins une chaîne.

b. On nous demande s'il existe un cycle eulérien

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est : 0 (tous les sommets ont un degré pair).

On détermine le degré de tous les sommets.

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
2	3	3	5	3	3	3

Il y a 6 sommets de degré impair donc le graphe n'admet pas de cycle eulérien.

Conclusion

Il n'existe pas de parcours permettant de revenir à une balise de départ en passant une et une seule fois par tous les chemins.

c. On nous demande s'il existe une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Donc il n'existe pas de chaîne eulérienne.

Conclusion

Il n'existe pas de parcours qui permet de relier deux balises différentes en passant une et une seule fois par tous les chemins.

2. On détermine un chemin le plus rapide, c'est à dire un chemin le plus court.

On utilise l'algorithme de DIJKSTRA.

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(B1)	21(B1)	13(B1)	∞	∞	∞	∞
	21(B1)	13(B1)	21(B3)	18(B3)	∞	∞
	21(B1)		20(B5)	18(B3)	∞	33(B5)
	21(B1)		20(B5)		24(B4)	33(B5)
	21(B1)				24(B4)	33(B5)
					24(B4)	29(B6)
						29(B6)

Le temps minimal du parcours est : **29 mn.**

Le plus court chemin :
ordre inversé B7-B6-B5-B3-B1.
Dans l'ordre de parcours : **B1-B3-B5-B6-B7.**

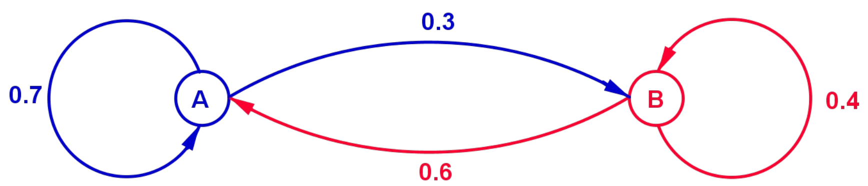
Partie B

1. L'énoncé précise que :

. 70 % des licenciés ayant adhéré une année à cette assurance, ont conservé cette assurance l'année suivante (donc 30 % des licenciés ayant adhéré une année à cette assurance, n'ont pas conservé cette assurance l'année suivante).

. 60 % des licenciés n'ayant pas adhéré une année à cette assurance, ont adhéré l'année suivante (donc 40 % des licenciés n'ayant pas adhéré une année à cette assurance, n'adhèrent pas à cette assurance l'année suivante).

<u>Conséquences</u>
Pour le graphe probabiliste :
Le poids de l'arête AA est 0,7.
Le poids de l'arête AB est 0,3.
Le poids de l'arête BA est 0,6.
Le poids de l'arête BB est 0,4.
On obtient :



2. La matrice M de transition du graphe dont l'ordre des sommets est A puis B est une matrice carrée 2×2 $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,7.
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,3.
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,6.
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,4.

$$M=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

3. $P_1=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}=P_0M=\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}M$

$P_1=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,8\times0,7+0,2\times0,6 & 0,8\times0,3+0,2\times0,4 \end{pmatrix}$

$P_1=\begin{pmatrix} 0,56+0,12 & 0,24+0,08 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,68 & 0,32 \end{pmatrix}$

$x_1 = \mathbf{0,68.}$

<u>Interprétation</u>
68 % des licenciés du club ont souscrit à l'assurance en 2011+1=2012.

4. On détermine l'état stable, c'est à dire on calcule le nombre réel x tel que :

$\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}M=\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\times0,7+(1-x)\times0,6 & x\times0,3+(1-x)\times0,4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,1x+0,6 & -0,1x+0,4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \mathrm{M} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1x+0,6=x \\ -0,1x+0,4=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9x=0,6 \\ 0,9x=0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{0,6}{0,9}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

L'état stable est $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$

Lorsque « n est grand » on a P_n voisin de P et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{2}{3} = 0,67$ à 10^{-2} près.

A long terme 67 % des licenciés auront souscrit à l'assurance.

67>55

Conclusion

L'évolution prévue lui permet d'envisager le maintien de son offre à long terme.