

Exercice 3

5 points

Une entreprise qui produit du papier recyclé a été créée en l'année 2000 et le tableau ci-dessous donne l'évolution de sa production.

Année	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Rang de l'année	0	2	4	6	8	10	12
Production en tonnes	7000	18811	36620	49000	58012	63098	68500

- 1.a. Déterminer le pourcentage d'augmentation entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme $a\%$ où a est un nombre entier.
- b. Déterminer un nombre réel positif qui est solution de l'équation : $x^{12}=9,79$. Interpréter ce nombre en termes de taux d'évolution de la production de cette entreprise entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme $b\%$ où b est un nombre entier.
2. L'entreprise fait appel à un cabinet d'experts pour modéliser l'évolution de la production afin de faire une projection jusqu'en 2020. Le cabinet d'experts propose la fonction f définie sur $[2;20]$ par : $f(x)=27131 \ln(x)+0,626 x^3$ où x représente le rang de l'année et $f(x)$ le nombre de tonnes produites.
 - a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2;20]$. Déterminer $f'(x)$ puis les variations de f sur $[2;20]$.
 - b. A l'aide de cette modélisation, l'entreprise peut-elle dépasser une production de 90 000 tonnes de papier recyclé avant l'année 2000 ? Justifier.
3. Une commande de bobines de papier de 2,50 m de large et pesant chacune environ 500 kg est faite à cette entreprise. Le poids d'une bobine varie en fonction de nombreux facteurs. Soit X la variable aléatoire qui à toute bobine choisie au hasard dans cette commande associe son poids. On admet que X suit une loi normale de paramètres $\mu=500$ et $\sigma=2$.
 - a. Toute bobine dont le poids est inférieur à 496 kg est refusée.
Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande soit refusée ? Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4} .
 - b. L'entreprise perd de l'argent pour toute bobine dont le poids est supérieur à 506 kg.
Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande fasse perdre de l'argent à l'entreprise ? Donner une valeur arrondie à 10^{-4} .

CORRECTION

1.a. Le pourcentage d'augmentation de la production entre les années 2000 et 2012 est :

$$\frac{68500 - 7000}{7000} \times 100 = 879 \text{ à l'unité près.}$$

Donc **879 %**

b. $x^{12} = 9,79$ en utilisant la calculatrice, on obtient : **$x = 1,21$** .

Le coefficient multiplicateur entre les années 2000 et 2012 est : $1 + \frac{879}{100} = 9,79$.

si on suppose le taux d'augmentation b % constant entre les années 2000 et 2012 alors le coefficient multiplicateur annuel est : $1 + \frac{b}{100}$.

$$\text{On obtient } \left(1 + \frac{b}{100}\right)^{12} = 9,79 \text{ et } 1 + \frac{b}{100} = 1,21$$

Donc **$b = 21$ %**.

2.a. f est dérivable sur $[2;20]$ et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 27131 \times \frac{1}{x} + 3 \times 0,626 x^2$$

La fonction dérivée est strictement positive sur $[2;20]$ donc f est strictement croissante sur $[2;20]$.

b. $f(20) = 27131 \times \ln(20) + 0,626 \times 20^3 = 86288$ à l'unité près.

$$86288 < 90000$$

Donc la production de l'entreprise ne dépassera pas 90000 tonnes en 2020.

3.a. X suit la loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 2$.

On nous demande de calculer $P(X \leq 496)$.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(X \leq 496) = \mathbf{0,0228}$ à 10^{-4} près.

La probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande soit refusée est : **0,0228**.

b. On nous demande de déterminer $P(506 \leq X)$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(506 \leq X) = \mathbf{0,0013}$ à 10^{-4} près.

La probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande fasse perdre de l'argent à l'entreprise est : **0,0013**.