Exercice 4 6 points

La population de l'Allemagne (nombre de personnes résidant sur le territoire allemand) s'élevait à 81 751 602 habitant aupremier janvier 2011.
De plus, on sait qu'en 2011le nombre des naissances en Allemagne ne compense pas le nombre de décès, et sans tenir compte des flux migratoires on estime le taux d'évolution de la population allemande à -0,22 %. On admet que cette évolution reste constante les années suivantes.
Les résultats seront arrondis à l'unité.

Partie A
On propose l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir le nombre entier naturel S
Initialisation :	Affecter à U la valeur 81 751 602
	Afffecter à N la valeur 0
Traitement :	Tant que $U > S$
	Affecter à U la valeur $0{,}9978 \times U$
	Affecter à N la valeur N+1
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

On saisit en entrée le nombre $S = 81\ 200\ 000$. Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on en sortie ?

U	81751602	81571748	.....	
N	0		.....	
Test U>S	Vrai		.....	

Partie B

On note u_n l'effectif de la population de l'allemagne au premier janvier $2011+n$.

1. Déterminer u_0 et u_1 .

2.a. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, de 1^{er} terme 81 751 602 et de raison 0,9972.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Si cette évolution de -0,22 % se confirme :

a. Quel serait l'effectif de la population de l'allemagne au premier janvier 2035 ?

b. En quelle année la population passera-telle en dessous du seuil de 81 200 000 habitants ?

Patie C

Dans cette partie, ontient compte des flux migratoires : on estime qu'en 2011, le solde migratoire (différence entre les entrées et les sorties du territoire) est positif en Allemagne et s'élève à 49 800 personnes.
On admet de plus que le taux d'évolution de -0,22 % ainsi que le solde migratoire restent constants les années suivant 2011.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite (v_n) dont on précisera le premier terme v_0 ainsi qu'une relation entre v_{n+1} et v_n.

2. Calculer v_1 et v_2. Que peut-on conjecturer sur l'évolution de la population de l'Allemagne ?

CORRECTION

Partie A

N = 0 U = 81 751 602
TEST U > S vrai
N = 1 $U=81\,751\,602\times 0{,}9978=81\,571\,748$ à l'unité près
TEST U > S vrai
N = 2 $U=81571602\times 0{,}9978=81392290$ à l'unité près.
TEST U > S vrai
N = 3 $U=81392290\times 0{,}9978=81213227$ à l'unité près.
TEST U > S vrai
N = 4 $U=81213227\times 0{,}9978=81034558$ à l'unité près.
TEST U > S **FAUX**
Donc Fin du Tant que et on affiche **N = 4**

U	81751602	81571748	81392290	81213227	81034558
N	0	1	2	3	4
Test U>S	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

Partie B

1. u_0 est l'effectif de la population au 1^{er} janvier 2011, u_0 = **81751602.**
u_1 est l'effectif de la population au 1^{er} janvier 2011+1 = 2012.
On estime le taux d'évolution de la population allemande à : -0,22 %
donc $u_1=u_0-\frac{0{,}22}{100}\times u_0$ et $u_1=81751602-179854$ = **81571748.**

2.a. Pour tout entier naturel n.
u_{n+1} est l'effectif de la population allemande au 1^{er} janvier 2011+n+1.
u_n Est l'effectif de la population allemande au 1^{er} janvier 2011+n.
$u_{n+1}=u_n-\frac{0{,}22}{100}u_n=\left(1-\frac{0{,}22}{100}\right)u_n=0{,}9978\,u_n$
(u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme $u_0=81751602$ et de raison $q=0{,}9978$.
b. Pour tout entier naturel n, $u_n=u_0\times q^n$ donc $u_n=81751602\times 0{,}9978^n$

3.a. 2035=2011+24
u_{24} sera l'effectif de la population au 1^{er} janvier 2035.
En utilisant la calculatrice on obtient :
$u_{24}=81751602\times 0{,}9978^{24}=77542583$
b. On doit résoudre l'inéquation : $81200000>81751602\times 0{,}9978^n$ où l'inconnue est n (entier naturel).
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
$\ln(81200000)>\ln(81751602\times 0{,}9978^n)$
En utilisant les propriétés de la fonction logarithme népérien
$\ln(81200000)>\ln(81751602)+\ln(0{,}9978^n)$
$\ln(81200000)-\ln(81751602)>n\ln(0{,}9978)$
Or $0{,}9978<1$ donc $\ln(0{,}9978)<0$
On obtient :

$$\frac{\ln(81200000)-\ln(81751602)}{\ln(0{,}9978)}<n$$

La calculatrice donne : 3,07 pour valeur approchée à 10^{-2} près.
N est un entier naturel donc $4\leqslant n$.
L'effectif de la population passera en-dessous du seuil de 81200000
au 1^{er} janvier 2011+4=2015.

Partie C

1. $u_0=v_0=81751602$

v_n est l'effectif de la population allemande au 1^{er} janvier 2011+n

v_{n+1} est l'effectif de la population allemande au 1^{er} janvier 2011+n+1.

Le taux d'évolution est : -0,22 % et le solde migratoire est ; 49800.

$v_{n+1}=v_n\times 0{,}9978+49800$.

2. $v_1=81758602\times 0{,}9978+49800=81571748+49800$ à l'unité près.

v_1 = **81621548.**

$v_2=81621548\times 0{,}9978$

v_2 **= 81491781** à l'unité près.

Dans un furtur proche l'effectif de la population allemande continuera de baisser.

