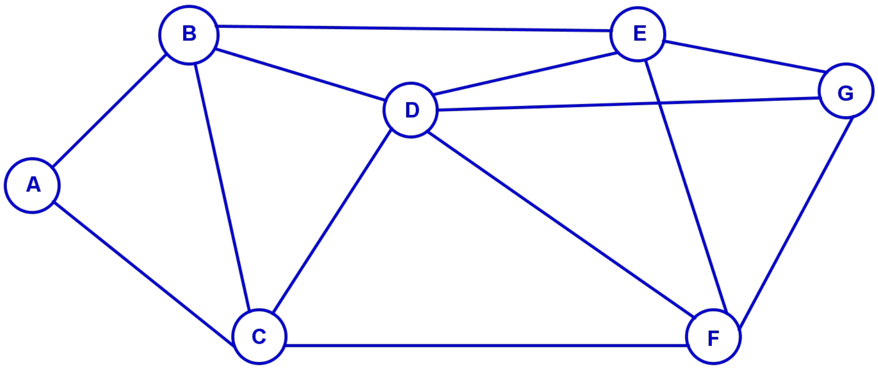
Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment
On considère le graphe Γ ci-dessous :



Partie A

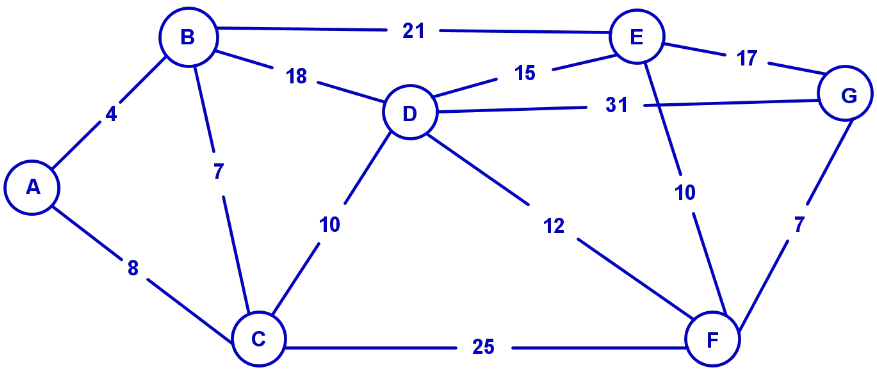
1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérirnne ? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.

2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse.Si oui donner un tel cycle.

3. Donner la matrice M associée au graphe Γ . Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique A,B,C,D,E,F,G.

Partie B

Une région est munie d'un réseau de trains, représentés par le graphe Γ ci-après.
Les stations sont symbolisés par les sommets A,B,C,D,E,F,et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours (correspondance comprise) en minutes entre chaque sommet ont été rajouté sur le graphe.



1. Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G.
Justifier la réponce grâce à un algorithme.

2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ?

CORRECTION

Partie A

1. **Théorème d'Euler**
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Le degré d'un sommet du graphe est le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité.
Pour le graphe Γ :
A est de degré 2
B est de degré 4
C est de degré 4
D est de degré **5**
E est de degré 4
F est de degré 4
G est de degré **3**
Donc **le graphe Γ admet une chaîne eulérienne.**
Rappel
Une chaîne est dite eulérienne lorsqu'elle contient chaque arête du graphe une et une seule fois.
Exemple de chaîne eulérienne
FGEFCABCDBEFDG.

2. **Théorème d'Euler**
Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0.(Tous les sommets ont un degré pair).
Donc **le graphe Γ n'admet pas de cycle eulérien.**

3. Le graphe Γ a 7 sommets donc la matrice associée M est une matrice à 7 lignes et 7 colonnes
i et j sont des entiers naturels compris entre 1 et 7.
Le coefficient m_{ij} de la matrice M, de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne, est égal à 1 s'il existe une arête reliant le $i^{ème}$ sommet au $j^{ème}$ sommet sinon il est égal à 0.
On obtient pour la ma matrice associée à Γ :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie B

1. On veut déterminer le chemin le plus court en minutes reliant la gare B à la gare G.

On se propose d'expliquer de manière détaillée l'utilisation de l'algorithme de DIJKSTRA (bien entendu ces explications ne sont pas demandées au baccalauréat).

Algorithme de DIJKSTRA

. étape 1 (initialisation)
* Dans la première ligne du tableau, on écrit tous les sommets du graphe (l'ordre des sommets

est arbitraire ici pour l'exemple on place en premier le sommet : B et en dernier le sommet G entre eux les sommets sont dans l'ordre alphabétique).

* Dans la deuxième ligne on écrit sous le point initial : 0 et sous les autres : ∞ (correspondant aux poids affectés aux sommets).

. étape 2

* Choisir parmi les sommets ,non encore marqués, un sommet X de poids minimal.
(Si plusieurs sommets ont le même poids alors le choix parmi ces sommets est arbitraire)

* Dans la nouvelle ligne et dans la colonne X on marque définitivement ce poids minimal (ici on l'écrit en rouge) et après cette case de la colonne on n'écrira plus rien.
(pour l'exemple on mettra en couleur les cases suivantes)

. étape 3

* Pour tous les sommets Y adjacents à X qui ne sont pas définitivement marqués on calcule la somme σ du poids de X et du poids de l'arête reliant X à Y.

  * Si cette somme σ est strictement inférieure au poids de Y alors on écrit dans la case de la ligne et de la colonne Y comme poids la somme σ obtenue et on notera σ(X).

  * Sinon on écrit dans cette case le poids précédent.

. étape 4

* S'il reste des sommets non marqués définitivement alors on repart à l'étape 2

* Sinon on passe à l'étape 5

. étape 5

On obtient le poids du plus court chemin dans la dernière ligne.
Puis on détermine le(ou un) plus court chemin obtenu.

On obtient le tableau suivant :

B	A	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(B)	4(B)	7(B)	18(B)	21(B)	∞	∞
	4(B)	7(B)	18(B)	21(B)	∞	∞
		7(B)	17(C)	21(B)	32(C)	∞
			17(C)	21(B)	29(D)	48(D)
				21(B)	29(D)	38(E)
					29(D)	36(F)
						36(F)

Le tableau nous donne le chemin le plus court en minutes pour aller de la gare B à la gare G.
On détermine d'abord les gares du trajet dans l'ordre inverse : G puis F puis D puis C puis B.
Conclusion
Le chemin le plus court est : BCDFG.

2. La longueur en minutes du chemin le plus court est : **36 mn.**