Exercice 3 5 points

Le 1er janvier 2000, un client a placé 3000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %.
On note C_n le capital du client au 1er janvier de l'année 2000+n, où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2 . Arrondir les résultats au centimes d'euros.

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a la relation : $C_n = 3000 \times 1{,}025^n$.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée : Saisir un nombre S supérieur à 3000
Initialisation : Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 3000
Traitement : Tant que $U \leqslant S$
n prend la valeur n+1
U prend la valeur $U \times 1{,}025$
Fin Tant que
Sortie : Afficher le nombre 2000+n

a. Pour la valeur S=3300 saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1	. . . .	
Valeur de U	3000		. . . .	
condition $U \leq S$	VRAI		. . . .	

b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3300.
c. Dans le contexe de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenue en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3000.

4. Au 1er janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.

5. Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1er janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

CORRECTION

1. C_1 et égal à C_0 augmenté des intérêts du 1^{er} janvier 2000 au 31 décembre 2000, donc

$C_1=C_0+\frac{2,5}{100}C_0=1,025C_0$

$C_0=3000$ donc $C_1=1,025\times 3000$ = **3075 €**

De même

$C_2=1,025\times C_1=1,025\times 3075\simeq 3151,87$

C_2 = **3151,87 €**

2. Pour tout entier naturel n, C_{n+1} est égal à C_n augmenté des intérêts du 1^{er} janvier 2000+n au 31 décembre 2000+n donc $C_{n+1}=C_n+\frac{2,5}{100}C_n=1,025\,C_n$

Conclusion

(C_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme $C_0=3000$ et de raison $q=1,025$

Conséquence

Pour tout entier naturel n, $C_n=C_0\times q^n=3000\times 1,025^n$.

3.a. On remplit le tableau demandé en utilisant la calculatrice

Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de U	3000	3075	3152	3231	3311
condition $U\leq S$	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	FAUX

b. L'affichage obtenu, quand S = 3300, est 2000+4 = **2004**

c. **L'affichage est la première année pour laquelle le capital est strictement supérieur à S.**

4. Au 1^{er} janvier 2013 le capital C_{13} est égal à $(1,025)^{13}\times 3000$

En utilsant la calculatrice, on obtient : $C_{13}=4135,53$ €

Ce capital est strictement inférieur à 5000€.

5. On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $3000\times(1,025)^n\geqslant 10\times 3000$

$3000\times(1,025)^n\geqslant 10\times 3000 \Leftrightarrow (1,025)^n\geqslant 10$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0,125^n)\geqslant\ln(10)\Leftrightarrow n\ln(1,025)\geqslant\ln(10)$

$1,025>1$ donc $\ln(1,025)>0$

$\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln(10)}{\ln(1,025)}$

on obtient $\frac{\ln(10)}{\ln(1,025)}\simeq 93,25$

Le plus petit entier naturel n vérifiant $C_n\geqslant 10C_0$ est **94.**

Conclusion

Le capital du client multiplié pr 10 au 1^{er} **janvier 2094.**

Remarque

La suite géométrique (C_n) est croissante, on peut déterminer n en utilisant la calculatrice ;

On doit alors écrire que : $1,025^{93}\leqslant 10\leqslant 1,025^{94}$.