Exercice 4 6 points

La partie C peut être traitée indépendamment des partiesA et B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle [0;6] par : $f(x)=1-(x+1)e^{-x}$

1. Montrer que $f'(x)=x\,e^{-x}$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f.

2. Démontrer que l'équation $f(x)=0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle [0;6].
Déterminer une valeur arrondie de α à 0,01.

3. On admet que la fonction F définie sur [0;6] par $F(x)=x+(x+2)e^{-x}$ est une primitive de f sur [0;6]. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} de $I=\int_0^6 f(x)\,dx$.

Partie B

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules electriques.
Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la partie A pour x compris entre 0 et 6.
x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit.
f(x) représente la production journalière de batteries en milliers.

1. Exprimer en mois puis en jours le moment où la production atteindra 0,5 millier soit 500 unités.

2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} de la valeur moyenne, exprimées en milliers, de la production sur les six premiers mois.

Partie C

Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.
Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie exprimée , exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu=200$ et d'écart-type $\sigma=40$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième , de ne pas atteindre cette ville ?

2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? justifier votre réponse.

CORRECTION

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;6] : $f(x)=1-(x+1)e^{-x}$

1. $(e^{-x})'=-e^{-x}$ $(x+1)'=1$ donc $f'(x)=0-1-e^{-x}-(x+1)\times(-e^{-x})=(-1+x+1)e^{-x}$
$f'(x)=x\,e^{-x}$

2. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0;6] on a $x\,e^{-x}\geqslant 0$ car $e^{x}>0$ donc f est strictement croissante sur [0;6].
$f(0)=1-(0+1)e^{0}=0$ et $f(6)=1-(6+1)e^{-6}=1-7\,e^{-6}\simeq 0{,}98$
f est continue et strictement croissante sur [0;6] et $f(0)\leqslant 0{,}5\leqslant f(6)$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un réel unique α tel que $f(\alpha)=0{,}5$.
En utilisant la calculatrice on obtient :
$f(1)\simeq 0{,}26$ et $f(2)\simeq 0{,}59$
$f(1{,}6)\simeq 0{,}48$ et $f(1{,}7)\simeq 0{,}51$
$f(1{,}67)\simeq 0{,}497$ et $f(1{,}68)\simeq 0{,}5005$
$f(\alpha)=0{,}5$ et f est strictement croissante sur [0;6] donc $1{,}67<\alpha<1{,}68$
$f(1{,}675)\simeq 0{,}499$ donc $0{,}675<\alpha<1{,}68$
1,68 est une valeur arrondie de α à 0,01.

3. F est une primitive de f sur [0;6] donc $I=\int_0^6 f(x)\,dx = F(6)-F(0)$

$I=6+8e^{-6}-2=4+8\,e^{-6}\simeq 4{,}020$

Partie B

1. $f(x)=0{,}5 \Leftrightarrow x=\alpha\simeq 1{,}68$
La production atteindra 0,5 millier soit 500 unités pour 1,68 mois
$1{,}58\times 30=50{,}4$
soit **50 jours**

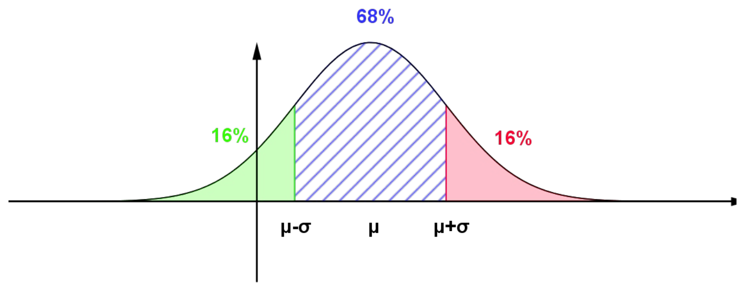
2. La valeur moyenne, exprimée en milliers, dela production sur les six premiers mois est :
$$\mu = \frac{1}{6}\int_0^6 f(x)\,dx \simeq \frac{4{,}020}{6}=0{,}670$$
μ = **0,670 millier**
soit **670 unités.**

Partie C

On note X la variable aléatoire égale au nombre de kilomètres d'autonomie permise par ces batteries.
On suppose que X suit la loi normale d'espérance $\mu=200$ et d'écart-type $\sigma=40$.
Rappels (résultats que l'on doit connaître)
Si X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ alors :
$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant \mu+\sigma)=0{,}68$
$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant \mu+2\sigma)=0{,}95$
$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant \mu+3\sigma)=0{,}99$

1. On nous demande de calculer : $P(X<160)$
. En utilisant les résultats précéents

$P(200-40\leqslant X\leqslant 200+40)=0{,}68$ soit $P(160\leqslant X\leqslant 240)=0{,}68$



$P(X\leqslant\mu-\sigma)=P(\mu+\sigma\leqslant X)=0{,}16$

donc $P(X<160)=P(X\leqslant 160)=0{,}16$

. En utilisant La calculatrice on obtient :
$P(X<160)=0{,}1587$ soit $0{,}16$ arrondi au centième.

2. On nous demande si $P(320\leqslant X)>0{,}01$

. En utilisant les résultats précédents
$P(200-3\times 40\leqslant X\leqslant 200+3\times 40)=0{,}99$
donc $P(80\leqslant X\leqslant 320)=0{,}99$
<u>Conséquence</u>
$P(320<X)=P(X<160)=\frac{1}{2}(1-0{,}99)=0{,}005$

Or $0{,}005 < 0{,}01$ donc la probabilité de pouvoir faire l'aller et le retou r jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est strictement inférieur à 0,01.

. Si on utilise la calculatrice on obtient $P(320<X)=0{,}0013$ qui donne la même conclusion mais la différence avec la valeur trouvée précédemment vient du fait que pour la formule $P(\mu-3\sigma\leqslant X<\mu+3\sigma)=0{,}99$ on arrondit au centième.