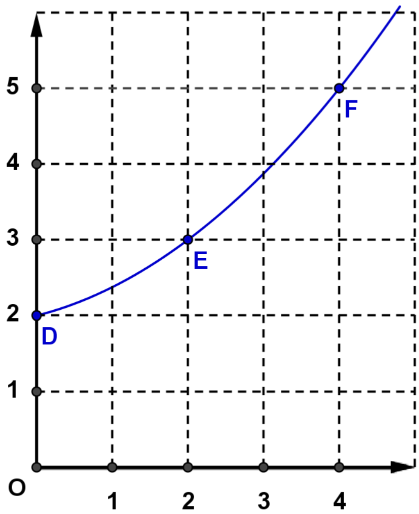
Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010 le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1^{er} janvier 2010 est passée à 300 agences au 1^{er} janvier 2012 puis à 500 agences au 1^{er} janvier 2014.

On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et f(x) exprime le nombre d'agences en centaines, la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.
Sur le dessin ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction f.



Partie A
On cherche à déterminer la valeur des coefficients a, b et c.

1.a. A partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

b. En déduire que le système précédent est équivalent à : MX=R avec

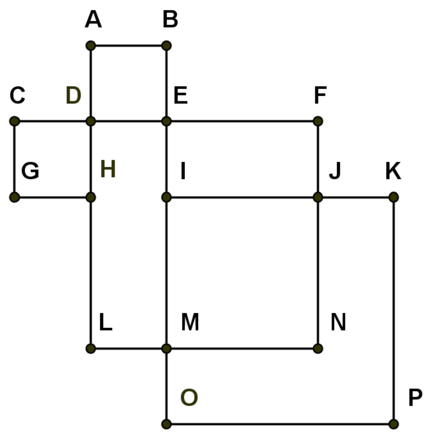
$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et R une matrice colonne que l'on précisera.

2. On admet que $M^{-1}=\begin{pmatrix} 0{,}125 & -0{,}25 & 0{,}125 \\ -0{,}75 & 1 & -0{,}25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
A l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des coefficients a, b et c, en détaillant les calculs.

3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprises possédera au 1^{er} janvier 2016.

Partie B
Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-après toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement.

Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.



1.a. Déterminer si le graphe est connexe.
b. Déterminer si le graphe est complet.

Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

2. Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :
a. Le point d'arrivée est le même que le point de départ.
b. Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.

CORRECTION

Partie A

1.a. Au premier janvier 2010, l'entreprise comptait 200 agences (deux centaines d'agences) donc $f(0)=2$.

. Au premier janvier $2012=2010+2$, l'entreprise comptait 300 agences (trois centaines d'agences) donc $f(2)=3$.

. Au premier janvier $2014=2010+4$, l'entreprise comptait 500 agences (cinq centaines d'agences) donc $f(4)=5$.

On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont trois nombres réels.

Donc $f(0)=2 \Leftrightarrow 0a+0b+c=2$

$f(2)=3 \Leftrightarrow 4a+2b+c=3$

$f(4)=5 \Leftrightarrow 16a+4b+c=5$

On obtient le ssystème : $\begin{cases} 0a+0b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 16a+4b+c=5 \end{cases}$

b. $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

En utilisant la définition du produit d'une matrice carrée par une atrice colonne, on obtient :

$$MX=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0a+0b+c \\ 4a+2b+c \\ 16a+4b+c \end{pmatrix}$$

On veut obtenir $MX=R$ donc $R=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $M^{-1}=\begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$MX=R \Leftrightarrow M^{-1}(MX)=M^{-1}R \Leftrightarrow (M^{-1}M)X=M^{-1}R \Leftrightarrow IX=M^{-1}R \Leftrightarrow X=M^{-1}R$

donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times0,125-3\times0,25+5\times0,125 \\ -2\times0,75+3\times1-5\times0,25 \\ 2\times1+3\times0+5\times0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,125 \\ 0,25 \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>Conclusion</u>

$f(x)=0,125x^2+0,25x+2$

3. Au premier janvier 2016=2010+6, le nombre de centaines d'agences que comptera l'entreprise est : f(6).

$f(6)=0,125\times36+0,25\times6+2=4,5+1,5+2=8$

Donc l'entreprise comptera 800 agences au premier janvier 2016.

Partie B

1.a. Un graphe est **<u>connexe</u>** si et seulement s'il existe toujours une chaçine reliant deux sommets distincts.
Pour l'exemple : deux distincts sont toujours reliès par au moins une chaîne, donc le graphe est connexe.

b. Un graphe est **<u>complet</u>** si et seulement si deux sommets distincts sont toujours reliés par une arête.
Pour l'exemple : les sommets H et I ne sont pas reliés par une arête donc le graphe n'est pas complet.

2. Une chaîne est eulérienne si et seulement si elle passe une et une seule fois par toutes les arêtes.
Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les sommets de départ et d'arrêt sont confondus.
Théorème d'Euler
. Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
. Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 (tous les sommets sont de degré pair).

On détermine le degré de tous les sommets du graphe, on donne le résultat sous la forme d'un tableau.

SOMMETS	A	B	C	D	E	F	G	H
DEGRES	2	2	2	4	4	2	2	3
SOMMETS	I	J	K	L	M	N	O	P
DEGRES	3	4	2	2	4	2	2	2

a. Il existe deux sommets de degré impair donc il n'existe pas de cycle eulérien.
b. Il existe deux sommets de degré impair donc il existe au moins une chaîne eulérienne.
Exemple
HLMNJFEDCGHDABEIMOPKJ**I.**