Exercice 3 — 6 points

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année.
Au 1^{er} janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.
A l'aide d'une suite, on modelise la population au 1^{er} janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1^{er} janvier de l'année $2004+n$.
On a ainsi $u_0=25000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :
a. au 1^{er} janvier 2005
b. au 1^{er} janvier 2006, en arrondissant à l'entier.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n=25000\times 0{,}85^n$.

3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1^{er} janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5000.
Recopier et compléter les lignes L4,L5et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1 :	**Variables**	u est un réel, n est un entier.
L2 :	**Initialisation**	u prend la valeur 25000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	**Traitement**	Tant que .... faire
L5 :		u prend la valeur ......
L6 :		n prend la valeur ......
L7 :		Fin Tant que
L8 :	**Sortie**	Afficher n

4. Montrer que la valeur n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10.

Partie B

Au 1^{er} janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. A partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.
On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1^{er} janvier de l'année $2014+n$. On a ainsi $u_0=5000$.

1.a. Calculer v_1 et v_2
b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1}=0{,}75\,v_n+400$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n=v_n-1600$
a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser la valeur de w_0.
b. Pour tout entier naurel n, exprimer w_n en fonction de n.
c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n=1600+3400\times 0{,}75^n$
d. Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

CORRECTION

Partie A

1.a. Au premier janvier 2005
Pendant l'année 2004, le nombre de singes baisse de 15 % soit $25000\times0{,}25=3750$ donc le nombre de singes au premier janvier 2015 est : $u_1=25000-3750=21250$.

b. Au premier janvier 2006
Pendant l'année 2005, le nombre de singes baisse de 15 % soit $21250\times0{,}15=3187{,}5$ (on arrondit à 3188) donc le nombre de singes au premier janvier 2006 est : $21250-3188=18062$.

2. n est un entier naturel, u_n est le nombre de singes au premier janvier $2004+n$, u_{n+1} est le nombre de signes au premier janvier $2004+(n+1)$.
Pendant l'année $2004+n$, le nombre de singes baisse de 15 % soit $u_n\times0{,}15$ donc le nombre de singes au premier janvier $2004+(n+1)$ est $u_{n+1}=u_n-u_n\times0{,}15=(1-0{,}15)u_n=0{,}85\,u_n$.

Conclusion
(u_n) est la suite géométrique de raison $q=0{,}85$ et de premier terme : $u_0=25000$.
Pour tout entier naturel n
$u_n=u_0\times q^n=25000\times0{,}85^n$

3. On complète l'algorithme

L1 :	**Variables**	u est un réel, n un entier
L2 :	**Initialisation**	u prend la valeur 25000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	**Traitement**	Tant que **u ⩾ 5000** faire
L5 :		u prend la valeur **ux0,85**
L6 :		n prend la valeur **n+1**
L7 :		Fin Tant que
L8 :	**Sortie**	Afficher n

4. Ici, pour représenter l'algorithme, on utilise un tableur
A1 : 0 B1 : 25000
A2 : =A1+1 B2 : =0,85xB1
Puis on étire jusque A11 et B11

	A	B
1	0	25000
2	1	21250
3	2	18062.5
4	3	15353.13
5	4	13050.16
6	5	11092.63
7	6	9428.74
8	7	8014.43
9	8	6812.26
10	9	5790.42
11	10	1921.86

. Par le calcul
On doit déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $u_n<5000$

$u_n<5000 \Leftrightarrow 25000\times 0{,}85^n<5000 \Leftrightarrow 0{,}85^n<\frac{5000}{25000}=\frac{1}{5}=0{,}2$

la fonction logarithme népérien ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\Leftrightarrow$ ln < ln 0,2 $\Leftrightarrow$ n ln 0,85< ln 0,2

Attention ln 0,85 < 0 (car 0,85 < 1)

$\Leftrightarrow n>\frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}85}$

En utilisant la calculatrice $\frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}85}=9{,}90$ à 10^{-2} près.

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n<5000$ est $n=10$

Partie B

1.a. Au premier janvier 2014 le nombre de singes est 5000.
Pendant l'année 2014, un quart des singes disparaît et il se produit 400 naissances.
Donc le nombre de singes au premier janvier 2015 est $v_1=5000-0{,}25\times 5000+400$

$v_1=5000-1250+400=4150$

Pendant l'année 2015, un quart des sines disparaît et il se produit 400 naissances.
Donc le nombre de singes au premier janvier 2016 est $v_2=4150-0{,}25\times 4150+400$

$v_2=3512$ (on arrondit à un entier).

b. v_n est le nombre de singes au premier janvier $2014+n$

v_{n+1} est le nombre de singes au premier janvier $2014+(n+1)$

Pendant l'année $2015+n$, un quart des singes disparaît et il se produit 400 naissances.
Donc $v_{n+1}=v_n-0,25v_n+400=(1-0,25)v_n+400=0,75v_n+400$.

2. Pour tout entier naturel n
$w_n=v_n-1600$ (donc $v_n=1600+w_n$)

a. $w_{n+1}=v_{n+1}-1600=0,75v_n+400-1600=0,75(1600+w_n)-1200=1200+0,75w_n-1200$
$w_{n+1}=0,75w_n$
(w_n) est la suite géométrique de raison 0,75 et de terme $w_0=v_0-1600=5000-1600=3400$

b. Pour tout entier naturel n
$w_n=w_0\times q^n=3400\times 0,75^n$

c. On a $v_n=1600+w_n$ donc $v_n=1600+3400\times 0,75^n$

d. $0<0,75<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^n=0$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1600$
<u>Interprétation</u>
Dans un avenir « lointain » il ne restera que 1600 singes de cette race.

