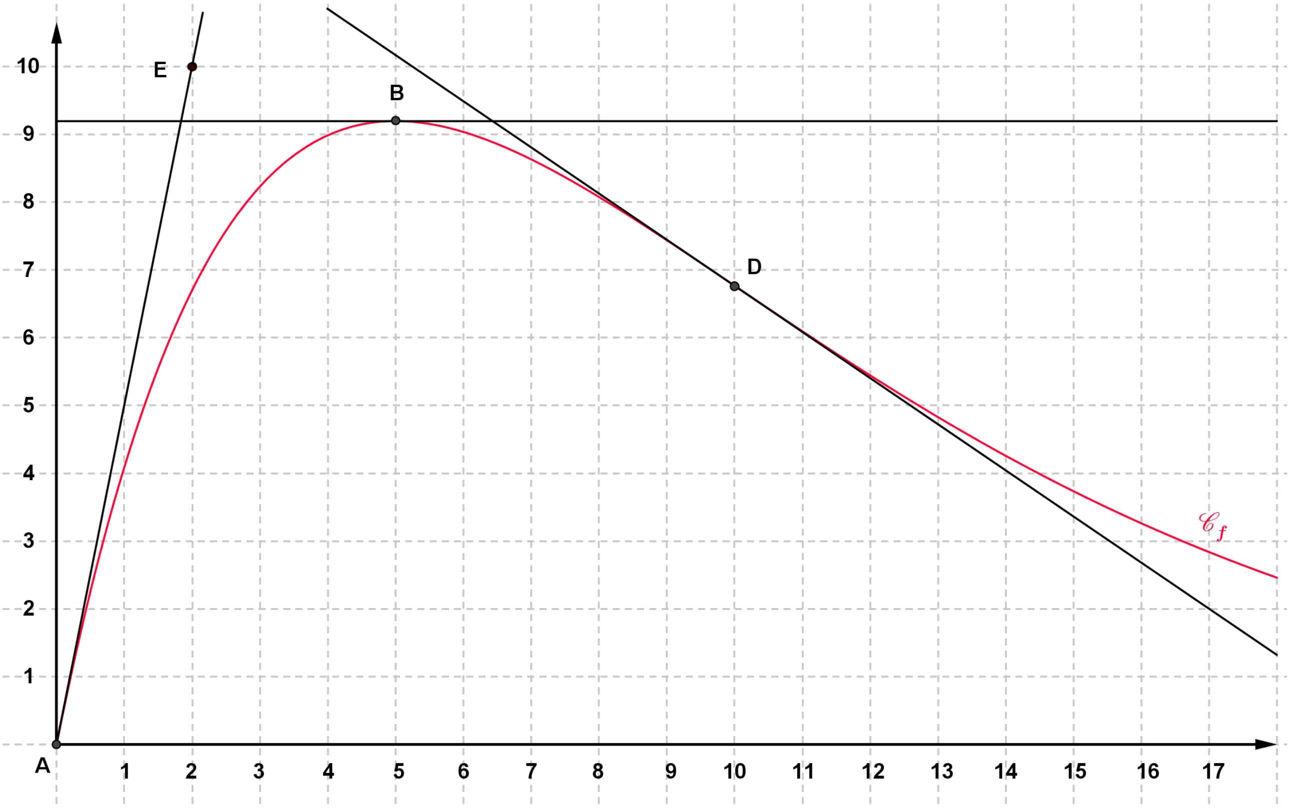
Exercice 4 5 points

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0:18]$ ainsi que les tangentes au point A d'abscisse 0, au point B d'abscisse 5 et au point D d'abscisse10.

On sait aussi que la tangente au point A passe par le point E de coordonnées $(2;10)$ et que la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Donner les valeurs de $f'(5)$ et de $f'(0)$.

2. On admet que D est un point d'inflexion. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie B

Une entre prise s'apprête à lancer sur le marché français un nouveau jouet destiné aux écoliers.

Les ventes espétées ont été modélisées par la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ a été tracée ci-dessus.

En abscisses, x représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire.

En ordonnées, f(x) représente le nombre de milliers de jouets vendus le $x^{ième}$ jour.

Ainsi, par exemple, le $10^{ième}$ jour après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise prévoit de vendre environ 6800 jouets.

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;18]$ par $f(x)=5xe^{-0,2x}$.

1. Montrer que $f'(x)=(5-x)e^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0;18]$.

2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;18]$ puis dresser le tableau de variations de f sut $[0;18]$.

3. Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximun de ventes par jour est atteint.
Préciser la valeur de ce maximun'arrondie à l'unité.

Partie C

1. On admet que la fonction F définie sur $[0;18]$ par $F(x)=(-25x-125)e^{-0,2x}$ est une primitive de la fonction f.

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^{10} f(x)\,dx$.

b. En déduire une estimation du nombre moyen de jouets vendus par jour durant la période des 10 premiers jours. On arrondira le résultat à l'unité.

2. Un logiciel de calcul formel nous donne les résultats suivants :

1	$dériver[(5-x)*exp(-0.2*x)]]$
	$-exp(-0.2*x)-\frac{1}{5}*exp(-0.2*x)*(-x+5)$
2	$Factoriser[-exp(-0.2*x)-\frac{1}{5}*exp(-0.2*x)*(-x+5)]$
	$\frac{x-10}{5}*exp(-0.2*x)$

Utiliser ces résultats pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

CORRECTION

Partie A

1. $f'(5)$ est égal au coefficient directeur de la tangente au point B de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5. Or la tangente en B à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est nul donc
$f'(5)=0$.
$f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente au point A de $\mathscr{C}_f$ or cette tangente est la droite (AE). Le coefficient directeur de la droite (AE) est égal à $\frac{y_E-y_A}{x_E-x_A}=\frac{10-0}{2-0}=5$
donc $f'(0)=5$.

2. D est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ donc $\mathscr{C}_f$ traverse au point sa tangente.
En utilisant la représentation graphique
. La courbe $\mathscr{C}_f$ est en de la tangente en D sur $[0;10[$ et au dessus sur $]10:18]$.
. Il n'y a pas d'autre point d'inflexion donc $f''(x)<0$ sur $[0;10[$ et $f''(x)>0$ sur $]10;18]$.
. La fonction f est concave sur $[0;10]$ et convexe sur $[10;18]$.

Partie B
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;18]$, $f(x)=5x\,e^{-0,2x}$

1. Rappel : $(e^u)'=u'e^u$
On a $(e^{-0,2x})'=(-0,2)e^{-0,2x}$
donc $f'(x)=(5)e^{-0,2x}+5x(-0,2)e^{-0,2x}=5e^{-0,2x}-xe^{-0,2x}=(5-x)e^{-0,2x}$

2. Pour tout nombre réel x : $e^{-0,2x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $[0;18]$ est le signe de 5-x.
Tableau de variations

x	0		5		18
f '(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\frac{25}{e}$	↘	$90e^{-3.6}$

$f(0)=0$ $\quad f(5)=90e^{-1}=\frac{25}{e}$ $\quad f(18)=90e^{-3,6}$

3. En regardant le tableau de variations, on peut affirmer qu'au bout de 5 jours, le maximum de ventes par jour est atteint, ce maximun est égal à : **9197** jouets (arrondi au chiffre près).

Partie C

1.a. $\int_0^{10} f(x)\,dx = F(10)-F(0)=-375e^{-2}-(-125)=125-375e^{-2}$

b. Le nombre moyen de jouets par jour durant la période des 10 premiers jours est :

$\mu = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(x)\,dx = \frac{1}{10(125-375e^{-2})} = 7425$ à une unité près.

2. Le logiciel de calcul formel nous donne l'expression de la dérivée seconde de f, donc pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;18]$ $f''(x) = (\frac{x-10}{5})e^{-0,2x}$.

Pour tout nombre réel x, $e^{-0,2x} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de $\left(\frac{x-10}{5}\right)$ sur $[0;18]$.

$f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 10 \leqslant x \leqslant 18$;

<u>Conclusion</u>

f est convexe sur $[0;18]$.