Exercice 1 5 points

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.
Les probabilités demandées seront données à 0,001 prés.

Une étude est menée par une association de lutte contre la violence routière. Des observateurs, sur un boulevard d'une grande ville, se sont interessés au comportement des conducteurs d'automobile au moment de franchir un feu tricolore.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse au respect de la signalisation par les automobilistes.

Sur un cycle de deux minutes (120 secondes), le feu est de la couleur « rouge » pendant 42 secon-des « orange » pendant 6 secondes et « vert » pendant 72 secondes.
Par ailleurs, les observateurs notent que les comportements diffèrent selon la couleur du feu :
. lorsque le feu est rouge, 10 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent ;
. lorsque le feu est orange, 86 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent ;
. lorsque le feu est vert, tous les conducteurs continuent de rouler.
On s'intéresse à un conducteur pris au hasard, et on observe son comportement selon la couleur du feu. On note :
. R l'événement « le feu est au rouge » ;
. O l'événement « le feu est à l'orange » ;
. V l'événement « le feu est au vert » ;
. C l'événement « le conducteur continue de rouler ».
Pour tout événement A, on note P(A) sa probabilité, $P_B(A)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé et $\bar{A}$ l'événement contraire de A.

1. Modéliser cette situation par un arbre pondéré.

2. Montrer que la probabilité que le conducteur continue de rouler au feu est 0,678.

3. Sachant que le conducteur continue de rouler au feu, quelle est la probabilité que le feu soit vert ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au trafic aux heures de pointe.

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de voitures par heure à proximité du feu évoqué dans la partie A.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 3000 et d'écart type 150.

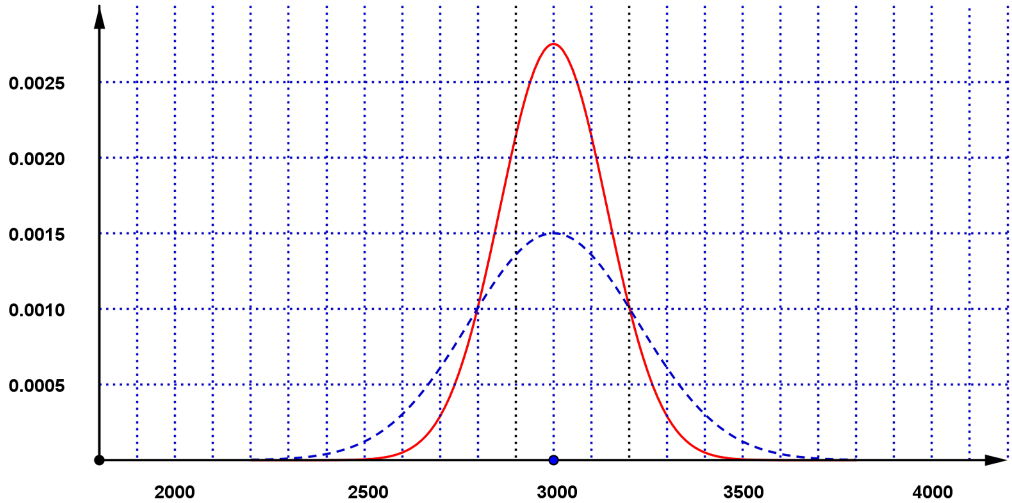
1. A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité de compter entre 2800 et 3200 voitures par heure à cet endroit.

2. A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité de compter plus de 3100 voitures par heure à cet endroit.

3. *Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructu-euse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

A un autre endroit du boulevard, à proximité d'un pont, la variable aléatoire Y qui compte le nombre de voitures

par heure suit la loi normale de moyenne 3000 et d'écart type σ strictement supérieur à 150.
Sur le graphique ci-dessous, la courbe correspondant à X est en traits pleins (et en rouge) et la cour-be correspondant à Y est en pointillé (et en bleu).
Déterminer à quel endroit du boulevard, à proximité du feu ou du pont, la probabilité qu'il passe en une heure, entre 2800 et 3200 voitures, est la plus grande. Justifier à l'aide du graphique.



<u>CORRECTION</u>

Partie A

1. L'énoncé précise :

. Sur un cycle de deux minutes (120 secondes), le feu est à la couleur « rouge » pendant 42 secondes, « orange » pendant 6 secondes et « vert » pendant 72 secondes

donc $P(R)=\frac{42}{120}=\frac{7}{20}=0{,}35$

$P(O)=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}=0{,}05$

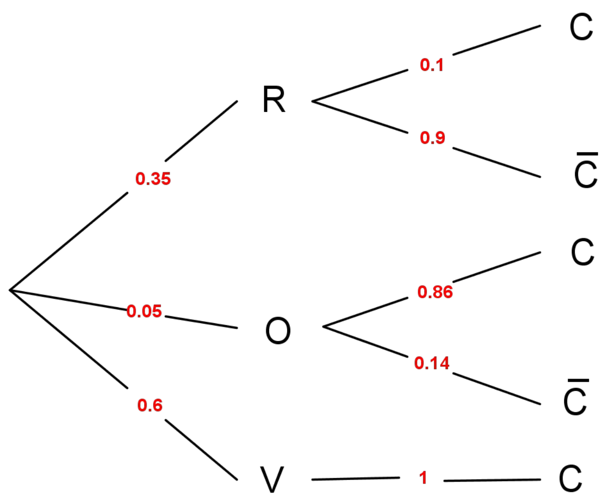
$P(V)=\frac{72}{120}=\frac{6}{10}=0{,}6$

. lorsque le feu est rouge, 10 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent donc :
$P_R(C)=0{,}1$ et $P_R(\overline{C})=1-P_R(C)=1-0{,}1=0{,}9$

. lorsque le feu est orange, 86 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent donc :
$P_O(C)=0{,}86$ et $P_O(\overline{C})=1-P_O(C)=1-0{,}89=0{,}14$

. lorsque le feu est vert, tous les conducteurs continuent de rouler donc : $P_V(C)=1$

. On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales
$P(C)=P(R\cap C)+P(O\cap C)+P(V\cap C)=P(R)\times P_R(C)+P(O)\times P_O(C)+P(V)\times P_V(C)$
$P(C)=0{,}35\times 0{,}1+0{,}05\times 0{,}86+0{,}6\times 1=0{,}035+0{,}043+0{,}6$ = **<u>0,678</u>**

3. On nous demande de calculer $P_C(V)$
$P_C(V)=\frac{P(C\cap V)}{P(C)}=\frac{0{,}6\times 1}{0{,}678}=\frac{0{,}6}{0{,}678}$ = **<u>0,769</u>**

Partie B

X suit la loi normale de moyenne 3000 et d'écart type 150.

1. En utilisant la calculatrice on obtient : $P(2800\leqslant X\leqslant 3200)$ = **<u>0,818</u>.**

2. En utilisant la calculatrice on obtient : $P(3100\leqslant X)$ = **<u>0,252</u>.**

3. X suit la loi normale de moyenne 3000 et d'écart type 150.
Y suit la loi normale de moyenne 3000 et d'écart type σ (non connu mais supérieur à 150).
On détermine graphiquement les abscisses des points d'intersection des deux courbes, on obtient : 2800 et 3200.
La probabilité, qu'il passe en une heure entre 2800 et 3200 voitures à proximité du feu est :
$P(2800 \leqslant X \leqslant 3200)$.
Sur le dessin, c'est l'aire en U.A. de la partie de plan comprise entre la courbe en rouge, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 2800 et x = 3200. Cette partie est colorée en rouge sur la figure suivante.
La probabilité, qu'il passe en une heure entre 2800 et 3200 voitures à proximité du pont est :
$P(2800 \leqslant Y \leqslant 3200)$.
Sur le dessin, c'est l'aire en U.A. de la partie de plan comprise entre la courbe en bleu, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 2800 et x = 3200. Cette partie est hachurée en bleu sur la figure suivante.
On remarque que la partie hachurée en bleu est contenue dans la partie colorée en rouge donc
$P(2800 \leqslant Y \leqslant 3200) < P(2800 \leqslant Y \leqslant 3200)$.

<u>Conclusion</u>

La probabilité, qu'il passe en une heure entre 2800 et 3200 voitures est plus grande à proximité du feu qu'à proximité du pont.