Exercice 2 6 points

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle [1;7] par : $f(x)=1{,}5x^3-9x^2+24x+48$.
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde sur l'intervalle [1;7].

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;7] :
a. Calculer $f'(x)$.
b. Calculer $f''(x)$

2. Déterminer sur quel intervalle la fonction f est convexe.

Partie B

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1000 et 7000 articles par semaine.
On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.
On note c la fonction définie sur [1;7] représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de [1;7] :
$c(x)=\frac{f(x)}{x}=1{,}5x^2-9x+24+\frac{48}{x}$.
On admet que la fonction c est dérivable sur [1;7]. On note c' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle [1;7], on a ;

$$c'(x)=\frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}$$

2.a. Etudier les variations de la fonction c sur l'intervalle [1;7].
b. Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle [1;7] par :
$F(x)=0{,}5x^3-4{,}5^2+24x+1+48\ln(x)$
a. Montrer que F est une primitive de c sur l'intervalle [1;7].
b. Calculer la valeur moyenne μ de c sur l'intervalle [1;7]. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} .

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;7] :

$f(x)=1,5x^3-9x^2+24x+48$

a. f est dérivable sur [1;7]

$f'(x)=1,5\times 3x^2-9\times 2x+24=4,5x^2-18x+24$

b. f' est dérivable sur [1;7]

$f''(x)=4,5\times 2x-18=9x-18$

2. $9x-18=0\Leftrightarrow x=\frac{18}{9}=2$

$9x-18>0\Leftrightarrow x>2$

$9x-18<0\Leftrightarrow x<2$

On donne le signe de $f''(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	1		2		7
f "(x)		−	0	+	

donc f est convexe sur [2;7].

Partie B

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;7] :

$c(x)=\frac{f(x)}{x}=1,5x^2-9x+24+\frac{48}{x}$

c est dérivable sur [1;7]

$c'(x)=1,5\times 2x-9-\frac{48}{x^2}=\frac{3x^3-9x^2-48}{x^2}=\frac{3(x^3-3x^2-16)}{x^2}$

On vérifie que : $(x-4)(x^2+x+4)=x^3-3x^2-16$

$(x-4)(x^2+x+4)=x^3+x^2+4x-4x^2-4x-16=x^3-3x^2-16$

<u>Conclusion</u>

$c'(x)=\frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}$

2.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;7], on a $x^2>0$ et $x^2+x+4>0$ donc le signe de c'(x) sur [1;7] est le signe de (x-4).

On donne les variation de c sous la forme d'un tableau.

x	1		4		7
c'(x)		−	0	+	
c(x)		↘	24	↗	

$c(4)=1,5\times16-9\times4+24 = \mathbf{24}$

b. Le coût moyen par article est minimal pour x = 4 (milliers d'articles)
le coût moyen par article minimal est égal à 24 €.

3. Soit Γ la fonction définie sur [1;7] par :
$\Gamma(x)=0,5x^3-4,5x^2+24x+1+48\ln(x)$

a. Γ est dérivable sur [1;7]

$$\Gamma'(x)=0,5\times3x^2-4,5\times2x+24+48\times\frac{1}{x}=4,5x^2-9x+\frac{48}{x}=f(x)$$

donc Γ est une primitive de f sur [1;7]

b. La valeur moyenne de c sur [1;7] est :

$$\mu = \frac{1}{7-1}\int_1^7 c(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mu = \frac{1}{6}(\Gamma(7)-\Gamma(0))=\frac{1}{6}(0,5\times7^3-4,5\times7^2+24\times7+1+48\ln(7)-0,5\times1^3-4,5\times1^2-24\times1-1)$$

$$\mu= \frac{1}{6}(171,5-220,5+168+1+48\ln(7)-0,5+4,5-24-1)=\frac{1}{6}(99+48\ln(7))=16,5+8\ln(7)$$

$\mu=$ **32,07** à 10^{-2} près.

