

Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement spécialité 5 points

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « la lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et elle demande ou non l'avis du bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « la lecture ». Son souhait de demander un avis change d'une semaine sur l'autre selon le plaisir qu'elle a eu à lire le livre et selon la pertinence du conseil donné par le bibliothécaire la semaine précédente.

La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut 0,1. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note a_n la probabilité que Claudine demande un avis la $n^{\text{ième}}$ semaine. On a ainsi $a_1=0,1$.

On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_{n+1}=0,5a_n+0,4$.

1. Calculer la probabilité a_2 que Claudine demande un avis la deuxième semaine.
2. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on définit la suite (v_n) par : $v_n=a_n-0,8$
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
Préciser son premier terme v_1 .
 - b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :
 $a_n=0,8-0,7 \times 0,5^{n-1}$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (v_n)
 - d. En déduire la limite de la suite (a_n) . Interpréter ce résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables : A est un réel
N est un entier naturel
L est un réel strictement compris entre 0,1 et 0,8

Initialisation : A prend la valeur 0,1
N prend la valeur 1

Traitement : Tant que $A \leq L$
N prend la valeur N+1
A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$
Fin Tant que

Sortie : Afficher N

- a. Pour la valeur $L=0,7$, recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant :

Valeur de N	1	2
Valeur de A	0.1	
Condition $A \leq L$	vraie	

...

- b. En déduire l'affichage de N obtenu en sortie de l'algorithme quand la valeur de L est 0,7.
 - c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment on peut interpréter le nombre N obtenu en sortie de l'algorithme quand le nombre L est compris strictement entre 0,1 et 0,8.
4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à 0,799.

CORRECTION

1. $a_1=0,1$ et pour tout entier naturel non nul n : $a_{n+1}=0,5 \times a_n + 0,4$.
 Pour $n=2$ on obtient : $a_2=0,5 \times a_1 + 0,4 = 0,5 \times 0,1 + 0,4 = \underline{0,45}$

2. Pour tout entier naturel non nul n .
 $v_n = a_n - 0,8$ (donc $a_n = v_n + 0,8$)

a. $v_{n+1} = a_{n+1} - 0,8 = (0,5 \times a_n + 0,4) - 0,8 = 0,5(v_n + 0,8) - 0,4 = 0,5 \times v_n + 0,4 - 0,4$
 $v_{n+1} = 0,5 v_n$

(v_n) est la suite géométrique de raison $q=0,5$ et de premier terme :

$v_1 = a_1 - 0,8 = 0,1 - 0,8 = -0,7$

b. Pour tout entier naturel non nul n : $v_n = v_1 \times q^{n-1} = -0,7 \times 0,5^{n-1}$
 et $a_n = 0,8 + v_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}$

c. $0 \leq 0,5 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \underline{0}$

d. $a_n = 0,8 + v_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \underline{0,8}$

Dans un grand nombre de semaines, la probabilité que Claudine demande l'avis du bibliothécaire sera voisine de 0,8.

3.a. Pour $N=2$ $a_2 = 0,5 \times 0,1 + 0,4 = 0,45$ ($0,45 \leq 0,7$)
 Pour $N=3$ $a_3 = 0,5 \times 0,45 + 0,4 = 0,625$ ($0,625 \leq 0,7$)
 Pour $N=4$ $a_4 = 0,5 \times 0,625 + 0,4 = 0,7125$ ($0,7125 > 0,7$)

On donne les résultats dans un tableau.

Valeur de N	1	2	3	4
Valeur de A	0.1	0.45	0.625	0.7125
Condition $A \leq L$	vraie	vraie	vraie	fausse

b. L'affichage de sortie est : **4** (Valeur de N)

c. Pour L donné compris strictement entre 0,1 et 0,8, N est le nombre minimal de semaines, pour que la probabilité que Claudine demande l'avis du bibliothécaire soit supérieure à L.

4. On peut continuer à utiliser l'algorithme précédent en utilisant la calculatrice c'est à dire en calculant $a_5, a_6 \dots$ (pour cet exemple on arrive assez rapidement au résultat).

Pour illustrer cette méthode , on propose d'utiliser un tableur.

En A1 : 1 en B1 : 0,1

En A2 : =A1+1 en B2 : =0,5xB1+0,4

Puis on étire pour obtenir un résultat supérieur à 0,799.

	A	B
1	1	0.1
2	2	0.45
3	3	0.625
4	4	0.7125
5	5	0.75625
6	6	0.77813
7	7	0.7890.6
8	8	0.79453
9	9	0.79727
10	10	0.79863
11	11	0.79932

On obtient $N=11$

. On peut aussi résoudre dans l'ensemble des entiers naturels, l'inéquation :

$$0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1} \geq 0,799$$

$$\Leftrightarrow 0,001 \geq 0,7 \times 0,5^{n-1} \Leftrightarrow \frac{0,001}{0,7} \geq 0,5^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{700} \geq 0,5^{n-1}$$

La fonction \ln est croissante sur $]0; +\infty[$ donc :

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{700}\right) \geq \ln(0,5^{n-1}) \Leftrightarrow -\ln(700) \geq (n-1)\ln(0,5)$$

$$0 < 0,5 < 1 \text{ donc } \ln(0,5) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\ln(700)}{\ln(0,5)} \leq n-1 \Leftrightarrow \frac{-\ln(700)}{\ln(0,5)} + 1 \leq n$$

En utilisant la calculatrice :

$$10,45 \leq n$$

n est un entier naturel donc $11 \leq n$

Conclusion

Après 11 semaines, la probabilité que Claudine demande l'avis du bibliothécaire est supérieure à 0,799.