Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement spécialité 5 points

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « LA lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et demande ou non l'avis de la bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».
Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis , la ptobabilité qu'elle le demande de nou-veau la semaine suivante est 0,9.

Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle ne le demande pas non plus la semaine suivante est 0,6.

La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut 0,1.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire la $n^{\text{ième}}$ semaine ;
- b_n la probabilité que Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire la $n^{\text{ième}}$ semaine ;
- $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste la $n^{\text{ième}}$ semaine.

On a ainsi $a_1=0{,}1$ et $b_1=0{,}9$

1.a. Illustrer la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B : A représente l'état « Claudine demande un avis à la bibliothécaire » ; B représente l'état « Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire ».

b. Indiquer la matrice de transition M associée à ce gaphe. On prendra les sommets A et B dans (A;B).

2. Montrer que l'on a $P_2=\begin{pmatrix}0{,}45 & 0{,}55\end{pmatrix}$.

3.a. Montrer que l'état stable de la répartition du choix de la demande d'avis est $P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$.

b. Interpréter ce résultat.

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_{n+1}=0{,}5\,a_n+0{,}5$.
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A est un réel N est un entier natureln L est un réel strictement compris entre 0,1 et 0,8
Initialisation :	A prend la valeur 0,1 N tend la valeur 1
Traitement :	Tant que $A \leqslant L$ N prend la valeur N+1 A prend la valeur $0{,}5\times A+0{,}4$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir.(On ne demande pas de donner la valeur de N affichée en sortie d'algorithme).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise encompte pour l'évaluation.*

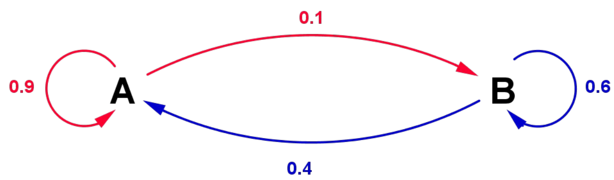
On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :
$a_n = 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}5^{n-1}$

Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à 0,799.

CORRECTION

1.a. L'énoncé précise :

- « Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis une semaine, la probabilité qu'elle le demande de nouveau la semaine suivante est 0,9 » donc la probabilité qu'elle ne demande pas l'avis de la bibliothécaire la semaine suivante $est : 1-0{,}9=0{,}1$.
  Conséquence
  Le poids de l'arête AA est 0,9.
  Le poids de l'arête AB set 0,1.
- « Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis une semaine, la probabilité qu'elle ne le demande pas la semaine suivante est 0,6 » donc la probabilité qu'elle le demande la semaine suivante est : $1-0{,}6=0{,}4$.
  Conséquence
  Le poids de l'arête BB est 0,6.
  Le poids de l'arête BA est 0,4
- On obtient le graphe probabiliste suivant :



b. Les sommets sont dans l'ordre (A;B) donc la matrice de transition associée à ce graphe est :

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,9
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,1.
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,4.
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,6.

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

2. $P_2=P_1M$

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}1\times 0{,}9 + 0{,}9\times 0{,}4 & 0{,}1\times 0{,}1 + 0{,}9\times 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}09 + 0{,}36 & 0{,}01 + 054 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$$

$$P_2=\begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$$

3.a. $P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ est l'état stable si et seulement si $a+b=1$ et $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}M=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}9\,a + 0{,}4\,b & 0{,}1\,a + 0{,}6\,b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}M=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}9\,a+0{,}4\,b=a \\ 0{,}1\,a+0{,}6\,b=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}1\,a=0{,}4\,b \\ 0{,}1\,a=0{,}4\,b \end{cases} \Leftrightarrow \{a=4\,b$$

Or $a+b=1$

$$a=4(1-a)=4-4\,a \Leftrightarrow 5\,a=4 \Leftrightarrow a=\frac{4}{5}=0{,}8$$

et $b=1-0,8=0,2$

Conclusion

L'état stable est $P=(0,8 \quad 0,2)$

b. Dans un grand nombre de semaines la probabiité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire sera de 0,8 (et donc la probabilité qu'elle ne demande pas un avis à la bibliothécaire est de 0,2).

4. Pour tout entier naturel n strictement positif on admet : $a_{n+1}=0,5\,a_n+0,4$.
L'algorithme permet de déterminer le nombre minimal de semaines tel que la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire soit supérieure à 0,79.

Remarque

On peut utiliser la calculatrice pour obtenir le nombre N (non demandé dans l'énoncé).
Nous avons utilisé un tableur dans l'exercice précédent et nous pouvons conclure que N=8.

5. Pour tout entier naturel n sstrictement positif, on admet que : $a_n=0,8-0,7\times0,5^{n-1}$

. On peut calculer a_1 , a_2 . . . en utilisant la calculatrice (pour cet exemple ou obtient assez rapidement le résultat).
Pour illustrer cette méthode, on propose d'utiliser un tableur.
En A1 : 1 En B1 : 0,1
En A2 : =A1+1 En B2 : $=0,8--0,7\times0,5^{n-1}$
Puis on étire pour obtenir un résultat supérieur à 0,799.

	A	B
1	1	0.1
2	2	0.45
3	3	0.625
4	4	0.7125
5	5	0.75625
6	6	0.77813
7	7	0.7890.6
8	8	0.79453
9	9	0.79727
10	10	0.79863
11	11	0.79932

On obtient N=11.

. On peut aussi résoudre dans l'ensemble des entiers naturels, l'inéquation :

$0,8-0,7\times0,5^{n-1}\geqslant0,799$

$$\Leftrightarrow 0,001\geqslant0,7\times0,5^{n-1}\Leftrightarrow\frac{0,001}{0,7}\geqslant0,5^{n-1}\Leftrightarrow\frac{1}{700}\geqslant0,5^{n-1}$$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$ donc :

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{700}\right)\geqslant\ln(0,5^{n-1})\Leftrightarrow-\ln(700)\geqslant(n-1)\ln(0,5)$$

$0<0,5<1$ donc $\ln(0,5)<0$

$$\Leftrightarrow\frac{-\ln(700)}{\ln(0,5)}\leqslant n-1\Leftrightarrow\frac{-\ln(700)}{\ln(0,5)}+1\leqslant n$$

En utilisant la calculatrice :

$10,45 \leqslant n$

n est un entier naturel donc $11 \leqslant n$

Conclusion

Après 11 semaines, la probabilité que Claudine demande l'avis du bibliothécaire est supérieure à 0,799.