Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélo à la journée.
Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites.
. si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est 0,6.
. si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est 0,7.
Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} près.

1. En notant respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « levélo est en B », traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A,B.

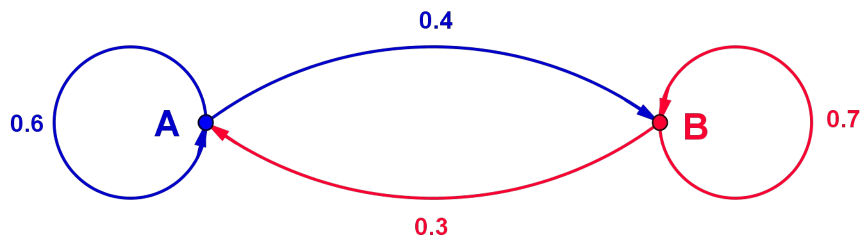
3. Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A(respectivement B).
On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste après n jours.
Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites A et B.
On a donc $P_0=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

a. On donne : $M^2=\begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}$

Calculer P_2 en donnant le détail des calculs matriciels.
b. Déterminer P_4 et interpréter le résultat dants le contexe du problème.
c. Déterminer l'état stable du graphe noté $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.
d. Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était 70 vélos sur chaque site.
La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12 vélos.
Ce choix paraît-il adapté à la situation ?

CORRECTION

1. Si un vélo est loué au site A, la probabilité d'être ramené en A est 0,6 donc la probabilité d'être ramené en B est : $1-0{,}6=0{,}4$.
Si un vélo est loué au site B, la probabilité d'être ramené en B est 0,7 donc la probabilité d'être ramené en A est : $1-007=0{,}3$.
En notant A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B ».On construit l'arbre probabiliste de sommets A et B.
On a $P_A(A)=0{,}6$ et $P_A(B)=0{,}4$ et $P_B(A)=0{,}3$ et $P_B(B)=0{,}7$.



2. La matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'otdre A puis B est :

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

m_{11} est le poids de l'arête AA soit $P_A(A)=0{,}6$
m_{12} est le poids de l'arête AB soit $P_A(B)=0{,}4$
m_{21} est le poids de l'arête BA soit $P_B(A)=0{,}3$
m_{22} est le poids de l'ar^te BB soit $P_B(B)=0{,}7$

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

3. Pour tout entier naturel n :
a_n (respectivement b_n) est la probabilité qu'un vélo quelconque, soit après n jours, sur le site A(respectivement B).
On a : $a_n+b_n=1$
$P_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est est l'état probabiliste après n jours.
$P_0=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$
Car le premier jour tous les vélos sont distribués également sur les deux sites.
Pour tout entier naturel n on a : $P_n=P_0M^n$.

a. On donne : $M^2=\begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix}$ (on peut vérifier ce résultat avec la calculatrice)

$P_2=P_0M^2=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5\times 0{,}48+0{,}5\times 0{,}39 & 0{,}5\times 0{,}52+0{,}5\times 0{,}61 \end{pmatrix}$

$P_2=\begin{pmatrix} 0{,}435 & 0{,}565 \end{pmatrix}$

b. $P_4=P_0M^4=P_0M^2\times M^2=P_2M^2$

$P_4=\begin{pmatrix} 0{,}435 & 0{,}565 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}435\times 0{,}48+0{,}565\times 0{,}39 & 0{,}435\times 0{,}52+0{,}565\times 0{,}61 \end{pmatrix}$

$P_4=\begin{pmatrix} 0{,}42915 & 0{,}57085 \end{pmatrix}$ à 10^{-2} près
$P_4=\begin{pmatrix} 0{,}43 & 0{,}57 \end{pmatrix}$

Après 4 jours
43 % des vélos sont au site obtient : A
57 % des vélos sont au site B

c. Pour déterminer l'état stable du graphe noté $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, il faut déterminer les réels a et b tels que :

$a+b=1$ et $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.

On obtient : $\begin{cases} a+b=1 \\ 0,6\,a+0,3\,b=a \\ 0,4\,a+0,7\,b=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ -0,4\,a+0,3\,b=0 \\ 0,4\,a-0,3\,b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 4\,a-3\,b=0 \end{cases}$

donc $7\,a=3 \Leftrightarrow a=\frac{3}{7}$ et $7\,b=4 \Leftrightarrow b=\frac{4}{7}$

Conclusion : $P=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

d. Le nombre de vélos au premier jour est 140 (70 sur chaque site).

$140\times\frac{3}{7}=60$ et $140\times\frac{4}{7}=80$

Pour l'état stable il y a 60 vélos au site A et 80 vélos au site B.
Pour revenir à l'état initial $P_0=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, il suffit de transporter 10 vélos du site B au site A.
Donc le choix de la municipalité d'affecter un véhicule pouvant contenir 12 vélos paraît adapté à la situation.