Exercice 3 — 5 points

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait 1 000 000 de clients. Depuis chaque année l'opérateur perd 10 % de ses clients, mais regagne dans lemême temps 60 000 nouveaux clients.

1.a. On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

```
Variables :     k, NbClients  sont des entiers
Traitement :    Affecter à k la valeur 0
                Affecter à NbClients la valeur 1000000
                Tant que  k < 8
                      affecter à k la valeur k+1
                      affecter à NbClients la valeur  0,9× NbClients+60 000
                      Afficher NbClients
                Fin Tant que
```

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec toutes les valeurs affichés de 0 jusqu'à 5.

k	0	1	2	3	4	5
NbClients						

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} U_0 = 1000 \\ U_{n+1} = 0{,}9\,U_n + 60 \end{cases}$$

Le terme U_n donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année 2010+n.
Pour étudier la suite (U_n), on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 600$.

a. Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,9.

b. Déterminer l'expression de V_n en fonction de n.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $U_n = 400 \times 0{,}9^n + 600$.

d. Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Interpréter le résultat dans le contexte du problème.

3. A lasuite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie mobile observe une modification du comportement de ses clients.
Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8 % de ses clients et regagne 100 000 nouveaux clients.
On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à 860 000.
En supposant que cette nouvelle évolution se poursuive durant quelques années, déterminer le nombre d'années nécessaire pour que l'pérateur retouve au moins un million de clients.

CORRECTION

1.a. On obtient le nombre de clients pour l'opérateur pour les 8 années de 2011 à 2018.
(Pour la première boucle k=1 et on affichele NbClients de 2011 et pour la dernière boucle k=8=7+1 et onaffiche le NbClients de 2018).
b. En utilisant la calculatrice on obtient le NbClients pour les années 2010 à 2015 et on remplit le tableau demandé.

k	0	1	2	3	4	5
NbClients	1000000	960000	924000	891600	862440	836196

2. Pour tout entier naturel n
$U_{n+1}=0,9\,U_n+60 \quad (U_0=1\,000)$ et $V_n=U_n-600$.
a. Pour tout entier naturel n
$V_{n+1}=U_{n+1}-600=0,9\,Un+60-600=0,9\,U_n-540$
or $U_n=V_n+600$
$V_{n+1}=0,9(V_n+600)-540=0,9\,V_n+540-540=0,9\,V_n$
(V_n) est donc une suite géométrique de raison 0,9
b. Le premier terme $V_0=U_0-600=1\,000-600=400$
et pour tout entier naturel n : $V_n=V_0\,q^n=400\times 0,9^n$.
c. $U_n=V_n+600$
donc pour tout entier naturel n :
$U_n=400\times 0,9^n+600$
d. Pour tout entier naturel n :
$U_{n+1}-U_n=400\times 0,9^{n+1}+600-400\times 0,9^n-600=400\times 0,9^n(0,9-1)=-400+0,9^n<0$
donc la suite (U_n) est décroissante.
Interprétation pour le problème :
Le nombre de clients de l'opérateur diminue d'année en année.

3. Pour l'année 2014 il y a 860 000 clients.
Pour tout entier naturel n, on note W_n le nombre de clients de l'opérateur pour l'année 2014+n.
Pou l'année 2014+(n+1) l'opérateur a perdu 8 de ses clients de 2014+n c'eqst à dire l'opérateur a conservé 92 % de ses clients de 2014+n.
Le nombre de clients conservés est donc $0,9\,W_n$.
L'opérateur regagne 100 000 nouveaux clients donc
$W_{n+1}=0,9\,W_n+100\,000$ et $W_0=860\,000$.
En utilisant la calculatrice, on obtient le tableau suivant

k	0	1	2	3	4	5	6
NbClients	860000	891200	919904	946312	970607	992958	1013522

en 2015: 891 200 . . . en 2020 : 0 013 522
Il faut donc 6 ans pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients.