Exercice 4 — 5 points

Les deux parties sont indépendantes.
Une machine permet le conditionnement d'un jus de fruit dans des bouteilles.
La quantité de jus injecté dans une bouteille par la machine, exprimée en ml (millilitre) est modélisée avec un variable aléatoire réelle X.
On admet que celle-ci suit une loi normale de moyenne $\mu=500$ et d'écart type $\sigma=2$.

Partie A
On prélève une bouteille au hasard en fin de chaîne de remplissage.

1. Déterminer $P(X\leqslant 496)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.
2. Déterminer la probabilité que la bouteille ait un contenu compris entre 497 et 500 millilitres.
Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.
3. Comment choisir la valeur de α afin que $P(500-\alpha\leqslant X\leqslant 500+\alpha)$ soit approximativement égale à 0,95 à 10^{-2} près.

Partie B
Une association de consommateurs a testé un lot de 200 bouteilles issues de cette chaîne de production. Il a été constaté que 15 bouteilles contiennent moins de 500 ml de jus de fruit contrairement à ce qui est annoncé sur l'étiquetage.
L'entreprise qui assure le conditionnement de ce jus de fruit affirme que 97 % des bouteilles produites contiennent au moins 500 millilitres de jus de fruit.
Le test réalisé par l'association remet-il en cause l'affirmation de l'entreprise ?

CORRECTION

Partie A

1. X suit la loi normale $\mathcal{N}(500:4)$.
En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(X\leqslant 496)=0{,}02$ (à 10^{-2} près)
Remarque :
Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$, on doit connaître les résultats suivants :
$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0{,}954$ et $P(X\leqslant\mu-2\sigma)=P(\mu+2\sigma)$
donc $P(X\leqslant\mu-2\sigma)=\frac{1-0{,}954}{2}=\frac{0{,}046}{2}=0{,}023$
Soit 0,02 à 10^{-2} près.
Pour l'exemple : $496=500-2\times2=\mu-2\sigma$
donc $P(X\leqslant 496)=0{,}02$.

2. En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(497\leqslant X\leqslant 500)=0{,}43$ (à 10^{-2} près)

3. En utilisant la remarque de la première question :
$P(500-2\sigma\leqslant X\leqslant 500+2\sigma)=0{,}95$ (à 10^{-2} près)
donc on choisit $\alpha=2\sigma$ et $\alpha=4$.

Partie B

La proportion de bouteilles contenant aumoins 500 millilitres dans l'échantillon de 200 bouteilles est : $f=\frac{200-15}{200}=\frac{185}{200}=0{,}925$.
L'entreprise qui assure le conditionnement du jus de fruit affirme que la probabilité de choisir au hasard une bouteille contenant au moins 500 ml de jus de fruit est 0,97.
On suppose que cette entreprise conditionne un « grand » nombre de bouteilles et l'association choisit(« au hasard »)un échantillon de 200 bouteilles.
On détermine un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
$n=200\geqslant 30$, $p=0{,}97$, $np=200\times0{,}97=194\geqslant 5$, $n(1-p)=200\times0{,}03=6\geqslant 5$
donc $I_{200}=\left[0{,}97-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}97\times0{,}03}{200}}\,;0{,}97+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}97\times0{,}03}{200}}\right]$
$0{,}023\leqslant 1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}97\times0{,}03}{200}}\leqslant 0{,}024$
donc $[0{,}95:0{,}99]\subset I_{200}\subset[0{,}97\,;1]$
0,925 n'appatient pas à I_{200} .
L'association peut donc remettre en cause l'arffirmation de l'entreprise au seuil de 95 %.