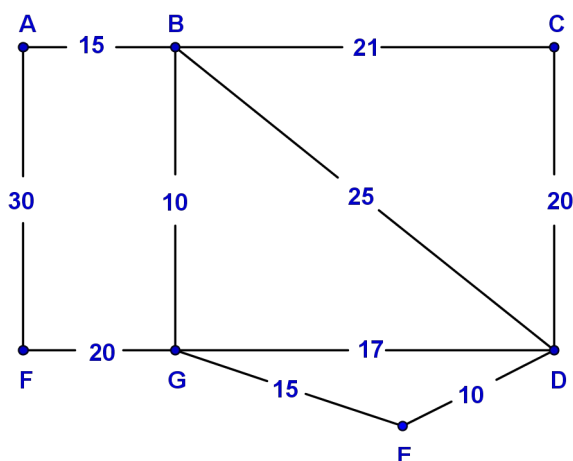


Exercice 2 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**

Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.
Le graphe ci-dessous schématise son plan ; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.



Partie A

Pour faire son parcours, le cycliste décide qu'il procèdera selon l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	Marquer sur le plan tous les villages comme non visités
ligne 2	Choisir un village de départ
ligne 3	Visiter le village et le marquer visité
ligne 4	Rouler vers le village le plus proche
ligne 5	Tant que le village où il arrive n'est pas un village déjà visité
ligne 6	Visiter le village et le marquer visité
ligne 7	Rouler vers le village le plus proche sans revenir en arrière
ligne 8	Fin Tant que
ligne 9	Afficher la liste des villages visités

1. Quelle propriété du graphe permet à la ligne 4 d'être toujours exécutable ?
2. En partant du village noté G, quelle sera la liste des villages visités ?
3. Existe-t-il un village de départ qui permette, en suivant cet algorithme, de visiter tous les villages ?
4. Le cycliste abandonne l'idée de suivre l'algorithme. Il souhaite maintenant, partant d'un village y revenir après avoir emprunté toutes les pistes cyclables une et une seule fois. Cela sera-t-il possible ?

Partie B

1. Ecrire la matrice M de transition de ce graphe (dans l'ordre A, B, C,.....,G)
2. On donne la matrice M^4 :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 & 11 & 4 & 1 & 16 \\ 5 & 30 & 12 & 23 & 18 & 16 & 16 \\ 9 & 12 & 12 & 14 & 9 & 4 & 18 \\ 11 & 23 & 14 & 28 & 14 & 11 & 23 \\ 4 & 18 & 9 & 14 & 12 & 9 & 12 \\ 1 & 16 & 4 & 11 & 9 & 10 & 5 \\ 16 & 16 & 18 & 23 & 12 & 5 & 30 \end{pmatrix}$$

Interpréter le terme de la 1^{ère} ligne et de la 6^{ème} colonne dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

1. Le graphe est connexe (deux sommets distincts sont reliés par au moins une chaîne) donc tout sommet admet au moins un sommet adjacent.
2. **G** puis **B** puis **A** puis **F** puis retour vers **G** (déjà visité).
3. oui, le sommet **C**.
C puis **D** puis **E** puis **G** puis **B** puis **A** puis **F**.
 En partant de **C**, on visite tous les villages pour arriver à **F**.
4. Le cycliste peut parcourir, partant d'un village et y revenir, toutes les pistes cyclables une et seule fois si et seulement si le graphe admet un cycle eulérien.
Théorème d'Euler
 Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si les degrés de tous les sommets sont pairs
 On détermine le degré de chaque sommet du graphe et on les résultats sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	2	4	2	2	4

Conclusion

Tous les sommets sont de degré pair donc il existe un cycle eulérien.

Donc le cycliste peut parcourir, partant d'un village et y revenir, toutes les pistes cyclables une et une seule fois.

Exemple

En partant de **A** :

ABCDBGEDGFA

(On peut passer plusieurs fois par le même sommets)

Partie B

1. On classe les sept sommets dans l'ordre alphabétique.
 i et j sont des entiers naturels compris entre 1 et 7
 $m_{ij} = m_{ji} = 1$ s'il existe une arête reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet sinon $m_{ij} = m_{ji} = 0$.
 On obtient pour matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le terme considéré est égal à 1 donc il existe une seule chaîne de longueur 4 reliant **A** à **F**.
 Cette chaîne est : **ABDGF**.