Exercice 3 4 points

Un couple fait un placement au taux annuel de 2 % dont les intérêts sont capitalisés tous les ans.
Son objectif est de constituer un capital de 18000 euros.
Le couple a placé le montant de 1000 euros à l'ouverture le 1^{er} janvier 2010 puis, tout les ans à chaque 1^{er} janvier, verse 2400 euros.

1. Déterminer le capital présent sur le compte le 1^{er} janvier 2011 après le versement annuel.

2. On veut déterminer la somme présente sur le compte après un certain nombre d'années
On donne ci-dessous trois algorithme :

Algorithme 1

```
Variables :
U est un nombre réel
i et n sont des nombres entiers
Entrée :
Saisir une valeur pour N
Début traitement
Affecter 1000 à U
Pour i de 1 à N faire
    Affecter 1,02xU+2400 à U
Fin Pour
Afficher U
Fin traitement
```

Algorithme 2

```
Variables :
U est un nombre réel
i et n sont des nombres entiers
Entrée :
Saisir une valeur pour N
Début traitement
Pour i de 1 à N faire
    Affecter 1000 à U
    Affecter 1,02xU+2400 à U
Fin Pour
Afficher U
Fin traitement
```

Algorithme 3

```
Variables :
U est un nombre réel
i et n sont des nombres entiers
Entrée :
Saisir une valeur pour n
Début traitement
Affecter 1000 à U
Pour i de 1 à N faire
    Affecter 1,02xU+2400 à U
    Affecter N+1 à N
Fin Pour
Afficher U
Fin traitement
```

a. Pour la valeur 5 de N saisie dans l'algorithme 1, recopier puis complléter, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire, le tableauci-dessous (arrondir les valeurs calculées au centième).

Valeur de i		**1**	**. . .**
Valeur de U	1000		**. . .**

b. Pour la valeur 5 de N saisie, quel affichage obtient-on en sortie de cet algorithme ? Comment s'interprète cet affichage ?

c. En quoi les algorithmes 2 et 3 ne fournissent pas la réponse attendue ?

3. A partir de la naissance de son premier enfant en 2016, le couple décide de ne pas effectuer le versement du premier janvier 2017 et de cesser les versements annuels tout en laissant le capital sur le compte rénuméré à 2 %.
Au premier janvier de quelle année l'objectif de 18000 euros est-il atteint ?

CORRECTION

1. Le capital au 1^{er} janvier2011 est égal à la somme du capital au 1^{er} janvier 2010 : 1000 € et des intérêts de ce capital pendant l'année 2010 : $1000\times\frac{2}{100}$ = 20 € et du versement au 1^{er} janvier 2011 : 2400 €.

On obtient : $1000+20+2400$ = **3420 €.**

2.a. Pour i = 1

$1000\times 1{,}02+2400=3420$

Pour i = 2

$3420\times 1{,}02+2400=5888{,}40$

Pour i = 3

$5888{,}40\times 1{,}02+2400=8406{,}17$

Pour i = 4

$8406{,}17\times 1{,}02+2400=10974{,}29$

Pour i = 5

$10974{,}29\times 1{,}02+2400=13593{,}78$

On donne les résultats dans un tableau.

Valeur de i		1	2	3	4	5
Valeur de U	1000	3420	5888.40	8406.17	10974.29	13593.78

b. On obtient, pour l'algorithme 1, pour N = 5, la valeur affichée : **13593,78**

c. Pour l'algorithme 2

La $1^{ère}$ instruction pour chaque boucle est :

Affecter à U la valeur 1000

La $2^{ème}$ instruction pour chaque boucle donne : 3420.

La valeur affichée sera : 3420 pour toute valeur de N.

. Pour Algorithme 3

La $2^{ème}$ instruction dans chaque boucle est :

Affecter N+1 à N

Conséquence :

On augmente N à chaque boucle et l'algorithme ne s'arrête pas.

3. Au premier janvier 2016, le capital est :

$13593{,}78\times 1{,}02+2400=16265{,}66$ €

A compter du 1^{er} janvier 2016, il n »y a plus de versement donc pour le capital, chaque année il n'y a que 2 % d(intérêts annuels.

On obtient une suite géométrique de 1^{er} terme 16265,66 et de raison : q = 1,02.

Pour n années (n entier naturel) au 1^{er} janvier 2016 + n le capital sera de : $16265{,}66\times 1{,}02^n$.

On veut déterminer n tel que : $16265{,}66\times 1{,}02^n \geqslant 18000$.

$\Leftrightarrow 1{,}02^n \geqslant \frac{18000}{16265{,}66}$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(1{,}02^n) \geqslant \ln\left(\frac{18000}{16265{,}66}\right) \Leftrightarrow n\ln(1{,}02) \geqslant \ln\left(\frac{18000}{16265{,}66}\right)$

1,02 > 1 donc ln(1,02) > 0

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{18000}{16265{,}66}\right)}{\ln(1{,}02)}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $n \geqslant 5{,}12$.
n est un entier naturel donc le plus petit entier naturel n tel que le capital soit supérieur à 18000€ est : **6**.

Conclusion

Le capital sera supérieur à 18000€ à partir du 1^{er} janvier $2016+6=2022$.