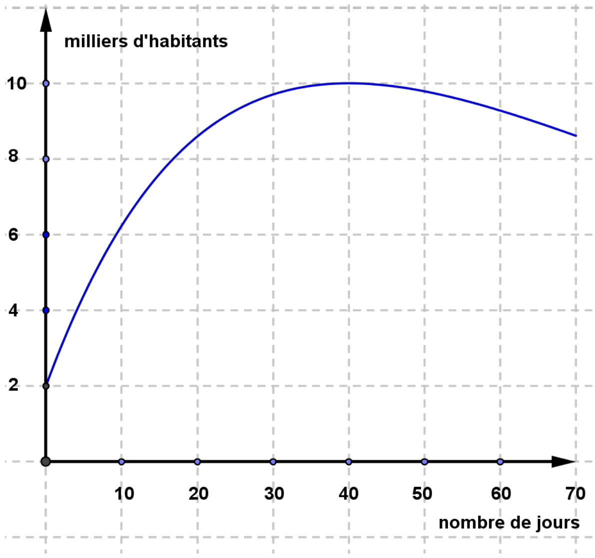
Exercice 4 6 points

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par la fonction f, définie sur l'intervalle [0;70], dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, f(x) désigne la population en milliers d'habitants. Ainsi $x=30$ correspond au 31 juillet et f(30) représente la population qui est prévu d'acceuillir le 31 juillet.
On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau.

Partie A : *Dans cette partie, les réponses sont à fournir par lecture graphique*

1.a. Estimer le nombre maximal d'habitants présents dans la station balnéaire selon ce modèle durant l'été 2015 et préciser à quelle date ce maximum sera atteint.
b. Lacommune est en capacité de fournir 600 000 litres d'eau par jour, est-ce suffisant ?

2. Estimer le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants de la station balnéaire devrait rester supérieur à 80 % du nombre maximal prévu.

Partie B

On admet que la fonction f est définie surl'intervalle [0;70] par : $f(x)=2+x e^{-0,025x+1}$;

1. Calculer f(9) puis vérifier que la consommation d'eau le 10 juillet serait, selon ce modèle, au plus de 324 890 litres.

2.a. Démontrer que $f'(x)=(0,2-0,005x)e^{-0,025x+1}$ où f' est la fonction dérivée de f.
b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0;70].
c. En déduire la date dela consommation d'eau maximale.

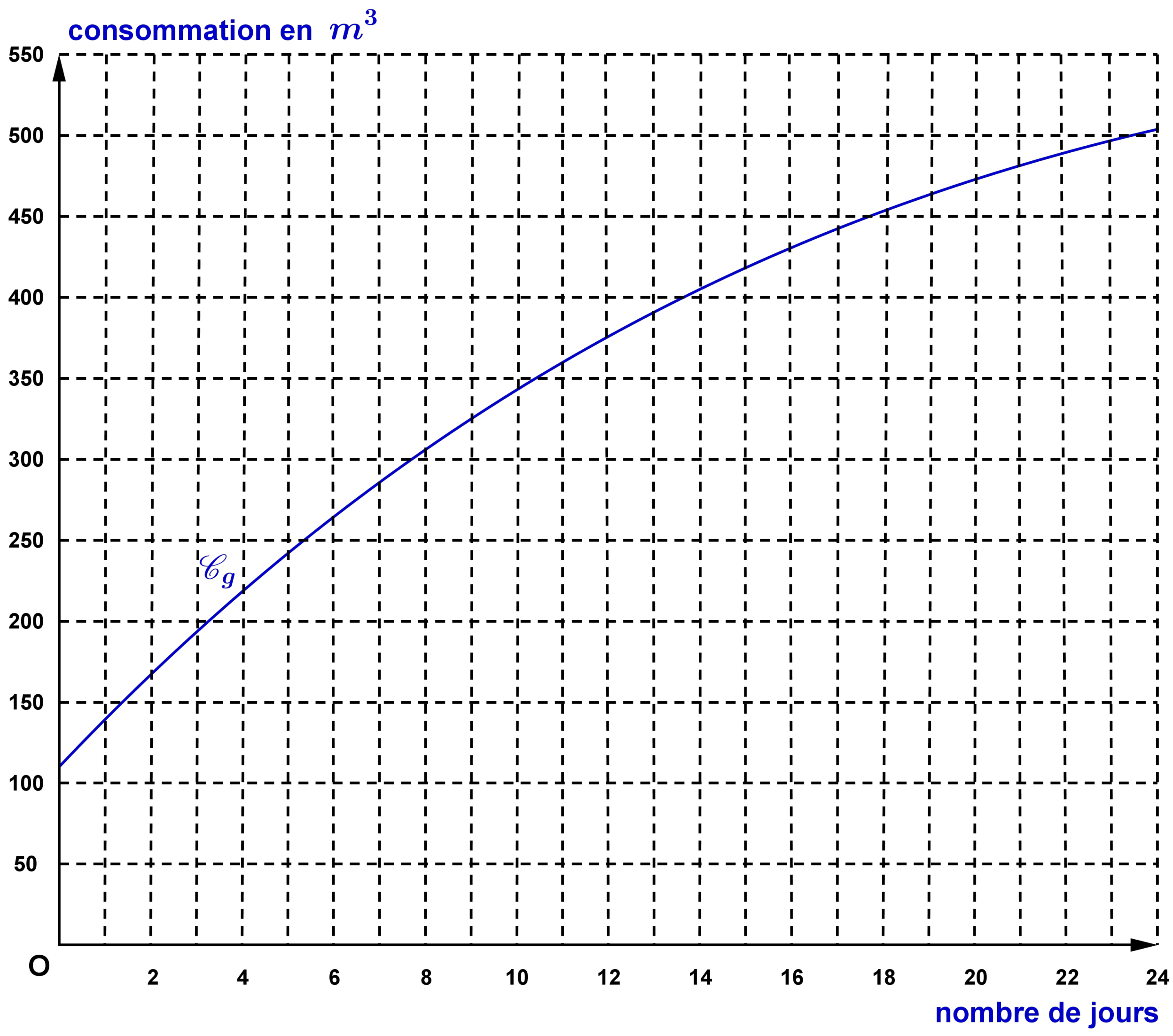
Partie C
On note g la fonction définie sur l'intervalle [0;70] par : $g(x)=55f(x)=110+11xe^{-0,025x+1}$.
Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, g(x) représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour là et exprimée en m^3.
Soit la fonction G définie sur l'intervalle 50;70] par : $G(x)=110x-(440x+17600)e^{-0,025x+1}$.

On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.
La somme $S = g(\{10\}) + g(\{11\}) + g(12) + \ldots + g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du $10^{ème}$ au $20^{ème}$ jour exprimée en m^3.

1. En l'illustrant sur la courbe $\mathscr{C}_g$ de l'**annexe** à rendre avec la copie, donner une interprétation graphique en termes d'aire de la somme S.

2. En déduire une valeur approximative de cette quantité d'eau consommée du $10^{ème}$ au $20^{ème}$ jour.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)



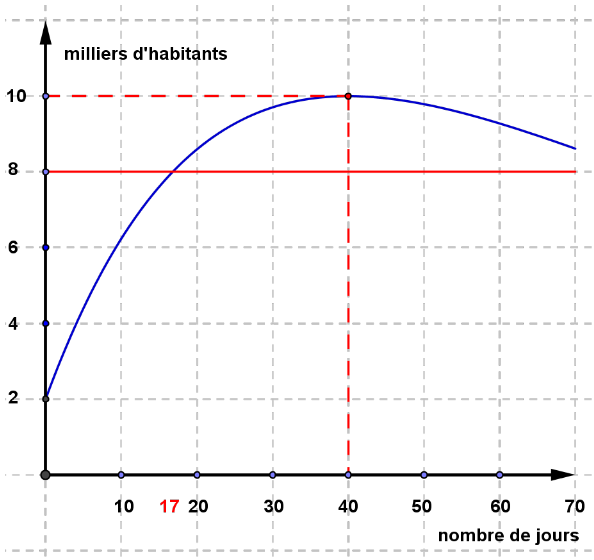
CORRECTION

Partie A

1. a. Par lecture graphique, on détermine le maximuù de f : pour x = 40 on a f(40) = 10.
Le 1er juillet correspond à x = 0 donc le 31 juillet correspond à x = 30 et le 10 août correspond à x = 40.
Conclusion
Le maximum d'habitants est obtenu le 10 août, ce maximum est égal à 10 000 habitants.
(f(x) est exprimé en milliers d'habitants).

b. Chaque consomme au maximun 55 litres d'eau par jour donc la consommation maximale d'eau pour un jour est : $55\times 10000=550000\,l$, or la commune est en capacité de fournir 600 000l d'eau par jour.
Conclusion
Cette capacité est suffisante.

2.a. Le nombre maximal d'habitants est : 10 000, 80 % du nombre maximal est donc égal à 8 000.
Sur la figure donnée dans l'énoncé, on trace la droite Δ d'équation $y=8$ et on détermine (par lecture graphique), l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite Δ , on obtient $x=17$.
La courbe est au-dessus de Δ sur l'intervalle [17;70].
Le nombre de jours durant lesquel lenombre d'habitantsest supérieur à 8 000 est : 70 – 17 = **53.**



Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;70] : $f(x)=2+0{,}2\,x\,e^{-0{,}025x+1}$

1. $f(9)=2+1{,}8e^{-0{,}225+1}=2+1{,}8\,e^{0{,}775}$
$f(9)=5{,}907$ (si on arrondit au millième).
Or $f(9)$ est le nombre d'habitants (en milliers) le 10 juillet.
Conséquence
Le 10 juillet il ya 5907 habitants.
La consommation maximale d'eau le 10 juillet est : $55\times 5907=324885\,l$.
(on obtient : 324890l si on n'arrondit pas au millième).

2.a. f est dérivable sur [0;70].

$u(x)=0,2x$ $u'(x)=0,2$

$v(x)=e^{-0,025x+1}$ $v'(x)=-0,025e^{-0,025x+1}$

$f'(x)=0,2e^{-0,025x+1}+0,2x(-0,025e^{-0,025x+1})=(0,2-0,005x)e^{-0,025x+1}$

b. Pour tout nombre réel x $e^{-0,025x+1}>0$, donc le signe de $f'(x)$ sur [0:70] est le signe de : $0,2-0,005x$ sur cet intervalle.

$$0,2-0,005x\geqslant 0\Leftrightarrow 0,2\geqslant 0,005x\Leftrightarrow \frac{0,2}{0,005}\geqslant x\Leftrightarrow \frac{200}{5}\geqslant x\Leftrightarrow 40\geqslant x$$

et $f'(x)$ est positive ou nulle sur [0;40 et négative sur]40;70].

On donne le signe de $f'(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	0		40		70
f'(x)		+	0	−	

c. <u>Conséquence</u>

f admet un maximum pour x = 40

$f(40)=2+0,2\times 40e^{-1+1}=2+8$ = **10**

Le nombre maximal d'habitants est égal à 10 milliers sooit 10 000.

La consommation maximale d'eau est égale à : $55\times 10000=5500001$

Partie C

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;70] : $g(x)=55f(x)=110+11xe^{-0,025x+1}$

g(x) est la consommation maximale d'eau en m^3 le jour correspondant à x.

$G(x)=110x-(440x+17600)e^{-0,025x+1}$

G est une primitive de g sur [0;70]

1. La fonction g est croissante sur [0;24] (car f est croissante sur [0;40]).

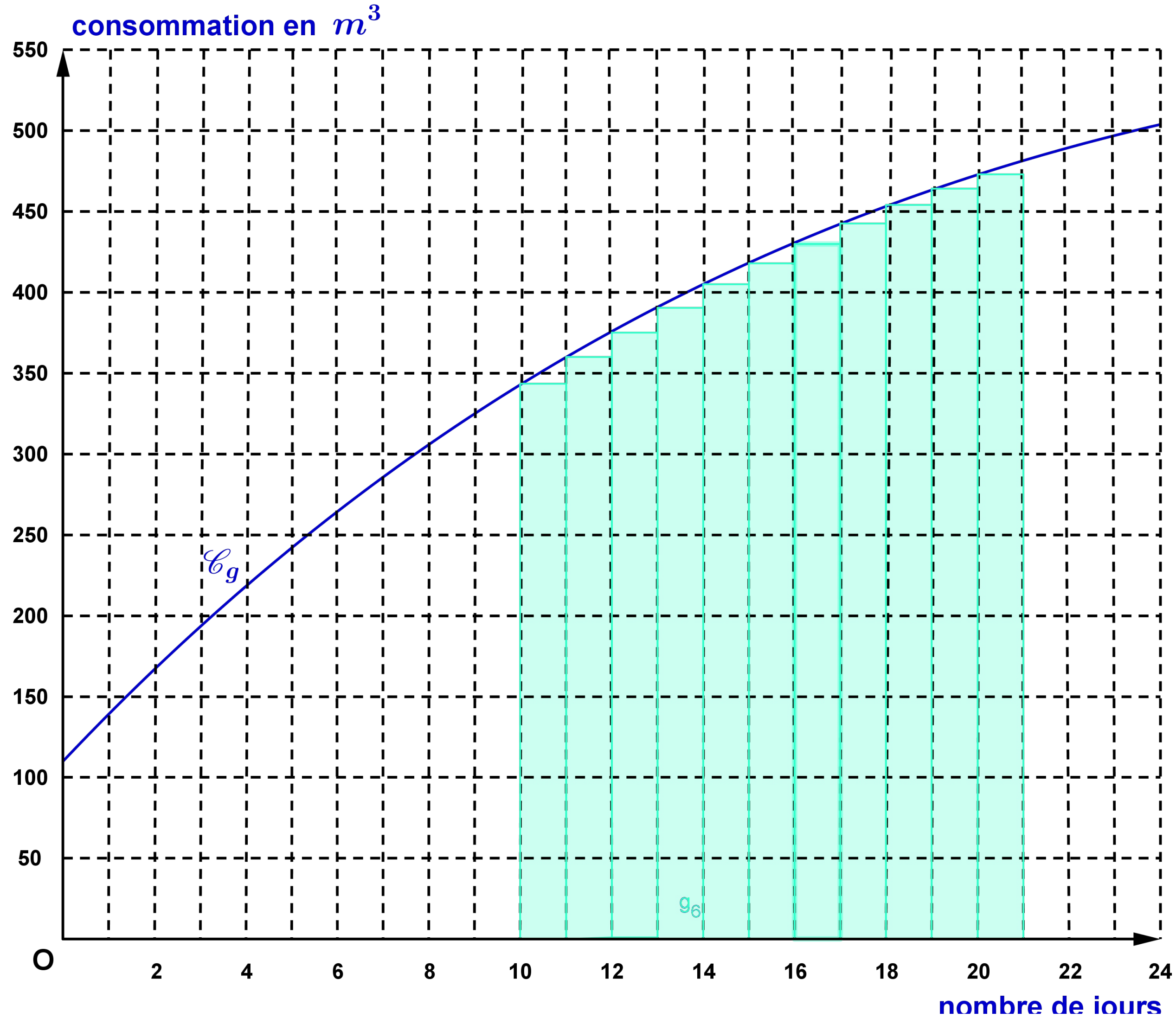
$g(10)=1\times g(10)$ est l'aire, en unité d'aire, durectangle de base 1 et de hauteur g(10).

$S=g(10)+g(11)+\ldots+g(20)$ Est la somme des aires de 11 rectangles de base 1 et de hauteurs g(10) ; g(11) ;...g(20).

La partie de plan correspondante est la partie colorée en bleu surlla figure donnée en annexe.

<u>Remarque</u>

S est la consommation maximale d'eau en m^3 entre le 11 juillet et le 21 juillet (soit 11 jours).



2. Pour obtenir approximative de S, il suffit de calculer l'aire de la partie de plan comprise ebtre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=10 et x=21 (et non 20) cette aire est égale à $\int_{10}^{21} g(x)\,dx = G(21)-G(10)$.

En utilisant la calculatrice (et on arrondit au centième)

$G(21)=110\times 21-(440\times 21+17600)e^{-0,525+1}=2310-26840\,e^{0,475}=-40849,10$

$G(10)\,110-22000\,e^{-0,25+1}=1101-22000\,e^{0,75}=-45474,00$

$G(21)-G(10)=44574-40845,1=4624,9$

Du 11 juillet au 21 juillet la consommation maximale d'eau est de $4624,9\text{ m}^3$.

<u>Remarque</u>

On ne peut pas donner la précision donc on donne une valeur approximative et non une valeur approchée.