

Exercice 2

5 points

Valentine place un capital dans une banque le 1<sup>er</sup> janvier 2014 au taux annuel de 2 %. A la fin de chaque année les intérêts sont ajoutés au capital, mais les frais de gestion s'élèvent à 25€ par an. On note  $C_n$  la valeur du capital au 1<sup>er</sup> janvier 2014+n.

**Partie A**

On considère l'algorithme ci-dessous :

**Initialisation :** Affecter à N la valeur 0  
**Traitement :** Saisir une valeur pour C  
 Tant que  $C < 2000$  faire  
     Affecter à N la valeur N+1  
     Affecter à C la valeur  $1,02 \times C - 25$   
 Fin Tant que  
**Sortie :** Afficher N

1.a. On saisit la valeur 1900 pour C. Pour cette valeur de C, recopier le tableau ci-dessous et le compléter, en suivant pas à pas l'algorithme précédent et en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Valeur de N	0		
Valeur de C	1900		

b. Quel est le résultat affiché par l'algorithme ? Dans le contexte de l'exercice, interpréter ce résultat.

2. Que se passerait-il si on affectait la valeur 1250 à C ?

**Partie B**

Valentine a placé 1900€ à la banque au 1<sup>er</sup> janvier 2014. On a donc  $C_0 = 1900$

1. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a  $C_{n+1} = 1,02 C_n - 25$

2. Soit  $(u_n)$  la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par :  $u_n = C_n - 1250$

a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Soit n un nombre entier naturel, exprimer  $u_n$  en fonction de n

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a :  $C_n = 850 \times 1,02^n + 1250$ .

3. Montrer que la suite  $(C_n)$  est croissante.

4. Déterminer, par la méthode de votre choix, le nombre d'années nécessaires pour que la valeur du capital dépasse 2100€.

**CORRECTION****Partie A**

1.a. En utilisant la calculatrice on obtient les résultats suivants :

Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de C	1900	1913	1926.26	1939.79	1953.58	1967.65	1982.01	1996.65	2011.58

b. Le résultat affiché est 8.

Au premier janvier 2014+8=2022, le capital dépassera 2 000€ pour la première fois.

2. Si  $C=1250$  alors  $1,02 \times C - 25 = 1,02 \times 1250 - 25 = 1275 - 25 = 1250$

Conclusion

La valeur du capital reste constante tous les ans.

**Partie B**

1. Pour tout entier naturel  $n$  :

$C_{n+1}$  est le capital au premier janvier 2014+(n+1).

$C_{n+1}$  est égal au capital au premier janvier 2014+n augmenté des intérêts pour l'année 2014+n

$\frac{2}{100} \times C_n = 0,02 C_n$  et diminué des frais de gestion de l'année de l'année 2014+n : 25€.

$$C_{n+1} = C_n + 0,02 C_n - 25 = 1,02 C_n - 25$$

2. Pour tout entier naturel  $n$

$$u_n = C_n - 1250 \quad (\text{soit } C_n = u_n + 1250)$$

$$a. \quad u_{n+1} = C_{n+1} - 1250 = 1,02 \times C_n - 25 - 1250 = 1,02 \times (u_n + 1250) - 1275 = 1,02 u_n + 1,02 \times 1250 - 1275$$

$$u_{n+1} = 1,02 u_n + 1275 - 1275 = 1,02 u_n$$

donc  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme  $u_0 = C_0 - 1250 = 1900 - 1250$

$$u_0 = 650$$

b. Pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n = u_0 \times q^n$  donc  $u_n = 650 \times 1,02^n$

$$\text{Or } C_n = u_n + 1250 \quad \text{donc } C_n = 650 \times 1,02^n + 1250$$

3. Pour tout entier naturel  $n$

$$C_{n+1} - C_n = 650 \times 1,02^{n+1} + 1250 - 650 \times 1,02^n - 1250 = 650 \times 1,02^n \times (1,02 - 1) = 0,02 \times 650 \times 1,02^n$$

$$C_{n+1} - C_n = 13 \times 1,02^n > 0$$

donc la suite  $(C_n)$  est croissante.

4. 1<sup>ère</sup> méthode

On veut déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $C_n \geq 2100$ .

$$650 \times 1,02^n + 1250 \geq 2100 \Leftrightarrow 650 \times 1,02^n \geq 2100 - 1250 \quad 650 \times 1,02^n \geq 850 \Leftrightarrow 1,02^n \geq \frac{850}{650} = \frac{17}{13}$$

La fonction logarithme népérien est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

$$\Leftrightarrow \ln 1,02^n \geq \ln \frac{17}{13} \Leftrightarrow n \ln 1,02 \geq \ln \frac{17}{13}$$

$$1,02 > 1 \quad \text{donc } \ln 1,02 > 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \frac{17}{13}}{\ln 1,02}$$

La calculatrice donne  $n \geq 13,55$ .

$n$  est un entier naturel donc  $n \geq 14$

La plus petite valeur de  $n$  est 14

### Conclusion

Au premier janvier 2014+14=2028, le capital dépassera pour la première fois 2 100€.

### 2<sup>ème</sup> méthode

En utilisant l'algorithme de la partie A et en remplaçant l'instruction « Tant que  $C < 2000$  faire » par « Tant que  $C < 2100$  faire », puis on utilise pas à pas l'algorithme avec la calculatrice.

Ici on utilise un tableur pour indiquer toutes les valeurs obtenues.

En A1 : 0                    en B1 : 1900

en A2 : =A1+1            en B2 : =B1x1,02-25

Puis on étire jusque A15 et B15 et on retrouve le résultat demandé.

	<b>A</b>	<b>B</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1900</b>
<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1913</b>
<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1926.26</b>
<b>4</b>	<b>3</b>	<b>1939.79</b>
<b>5</b>	<b>4</b>	<b>1953.58</b>
<b>6</b>	<b>5</b>	<b>1967.65</b>
<b>7</b>	<b>6</b>	<b>1982.01</b>
<b>8</b>	<b>7</b>	<b>1996.65</b>
<b>9</b>	<b>8</b>	<b>2011.58</b>
<b>10</b>	<b>9</b>	<b>2023.81</b>
<b>11</b>	<b>10</b>	<b>2042.35</b>
<b>12</b>	<b>11</b>	<b>2058.19</b>
<b>13</b>	<b>12</b>	<b>2074.36</b>
<b>14</b>	<b>13</b>	<b>2090.84</b>
<b>15</b>	<b>14</b>	<b>2107.66</b>