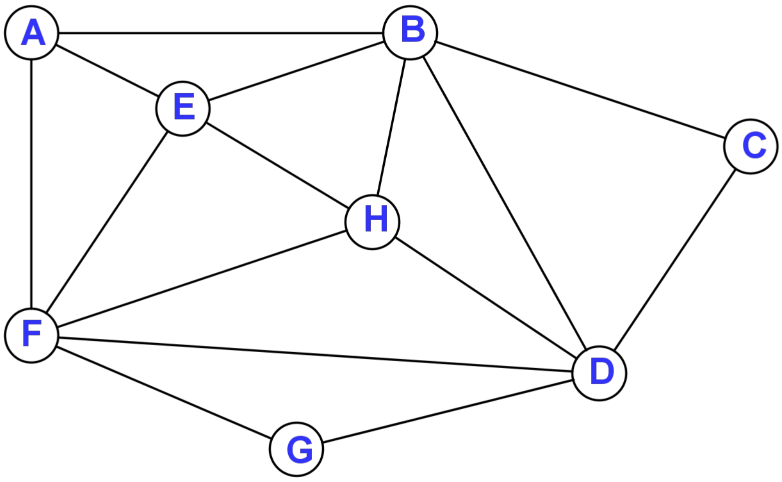
## Exercice 2 5 points

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous noté $\mathcal{G}$. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représen-tent le réseau routier reliant ces exploitations.




**Partie A**

**1.a.** Le graphe $\mathcal{G}$ est-il complet? Justifier.
**b.** Le graphe $\mathcal{G}$ est-il connexe ? Justifier.

**2.** Est-il possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule cha-que route ? Justifier votre réponse.

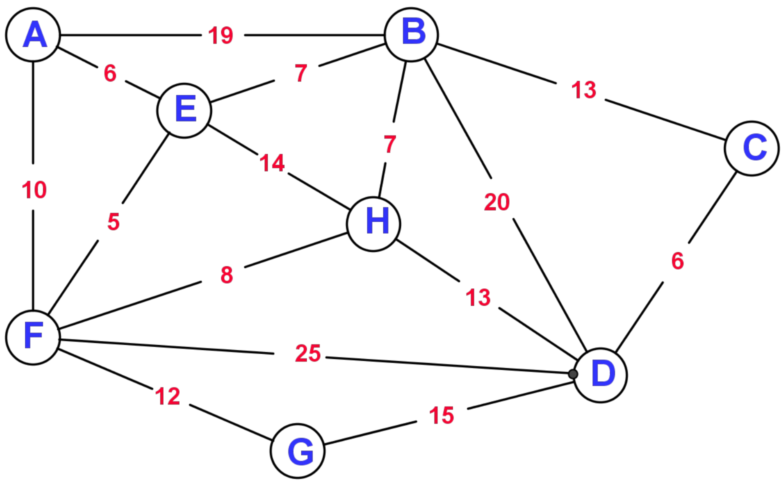
**3.** On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H.
Indiquer ces chemins.

**Partie B**

Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D, quel est le plus court parcours pour se rendre de A à D ? Justifier.



**<u>CORRECTION</u>**

**Partie A**

**1.a.** Le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas complet car il n'existe pas d'arête reliant A à C (par exemple).
**b.** Le graphe $\mathcal{G}$ est connexe car il existe une chaîne reliant les 8 sommets du graphe (exemple : ABCDHEFG).

**2.** On nous demande de déterminer s'il existe un cycle eulérien.

**<u>Théorème d'Euler</u>**
**Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le degré de tous les sommets est pair.**

On détermine le degré de tous les sommets et on donne le résultat sous forme de tableau.

| A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 2 | 5 | 4 | 5 | 2 | 4 |

Il existe quatre sommets de degré impair donc il n'existe pas de cycle eulérien et il n'est pas possible d'organiser une telle tournée.

**3.** L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique.
M est la matrice d'adjacence et l'énoncé nous donne $M^3$ .
Les coefficients de la matrice $M^3$ sont les nombres de chaînes de longueur 3 reliant 2 sommets (distincts ou non distincts).
Pour la première ligne :
4 est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à A.
11 est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à B.
etc. . .
et 6 est le nombres de chaînes de longueur 3 reliant A à H.
Ces 6 chemins sont :
ABEH
ABDH
AEBH
AEFH
AFEH
AFDH

**Partie B**

Pour déterminer le plus court parcours de A à D, on utilise l'algorithme de DIJKSTRA.

| A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| A(0) | A(19) | ∞ | ∞ | A(6) | A(10) | ∞ | ∞ |
| | E(13) | ∞ | ∞ | A(6) | A(10) | ∞ | E(20) |
| | E(13) | ∞ | F(35) | | A(10) | F(22) | F(18) |
| | E(13) | B(26) | B(33) | | | F(22) | F(18) |
| | | B(26) | H(31) | | | F(22) | F(18) |
| | | B(26) | H(31) | | | F(22) | |
| | | B(26) | H(31) | | | | |
| | | | H(31) | | | | |

AFHD est le plus court parcours reliant A àD (31 kilomètres).