Exercice 3 — 7 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0;10]$ par : $f(x)=x+e^{-x+1}$.
Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous

1	f(x) : = x+exp(-x+1)
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	x ⟶ x+exp(-x+1)

2	derive (f(x))
	-exp(-x+1)+1

3	solve (-exp(-x+1)+1>0
	[x>1]

4	derive (-exp(-x+1)+1)
	exp(-x+1)

1. Etude des variations de la fonction f.
a. En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.
b. En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.

2. Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$.

Partie B

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.
Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et f(x) le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

1. Quen nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?

2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12€. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.
a. Justifier que le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets est $1{,}2x$ milliers d'euros.
b. Montrer que la marge brute pour x centaines d'objets, notée g(x), en milliers d'euros est donnée par : $g(x)=0{,}2x-e^{-x+1}$
c. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;10]$.

3.a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0;10]$.
b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;10]$: $f(x)=x+e^{-x+1}$.

1.a. Le logiciel de calcul formel nous donne pour tout x de l'intervalle [0;10].

$f'(x)=-e^{-x+1}+1$ et $-e^{-x+1}+1>0 \Leftrightarrow x>1$

Conséquence

$f'(x)>0$ sur]1;10] et $f'(x)<0$ sur [0;1[

$f(0)=0+e^{1}=e$ $f(1)=1+e^{0}=1+1=2$ $f(10)=10+e^{-9}=10{,}0001$ à 10^{-4} près.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		10
f'(x)		−	0	+	
f(x)	e	↘	2	↗	f(10)

b. La dérivée s'annule en changeant de signe en 1 donc donc f admet un minimun eni égal à 2.

2. Le logiciel nous donne la dérivée seconde de f et $f''(x)=e^{-x+1}>0$.

Donc f est convexe sur l'intervalle [0;10].

Partie B

1. Sachant que le coût est modélisé par la fonction f qui admet un minimum pour 1, il faut donc produire 100 objets.

2.a. chaque objet est vendu 12€, la vente de x centaines d'objets rapporte 12x centaines d'euros, soit 1,2 milliers d'euros.

b. La marge brute pour x centaines d'euros est :

c. $(e^{u})'=u'e^{u}$ donc $(e^{-x+1})'=-e^{-x+1}$

car $u(x)=x+1$ et $u'(x)=-1$

donc $g'(x)=0{,}2+e^{-x+1}$

Or $e^{-x+1}>0$ et g est strictement croissante sur [0;10].

3.a. g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur [0;10] et $g(0)=0-f(0)=-e<0$ et $g(10)=2-e^{-9}>0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle [0;10].

b. En utilisant la calculatrice :

$g(1)=1{,}2-f(1)=1{,}2-2=0{,}8<0$

$g(2)=2{,}4-2-e^{-1}=0{,}03>0$ (à 10^{-2} près)

$1<\alpha<2$

$g(1{,}9)=-0{,}03<0$

$1{,}9<\alpha<2$

$g(1{,}95)=0{,}003>0$ (à 10^{-3} près)

$g(1{,}94)=-0{,}003<0$

donc $1{,}94<\alpha<1{,}95$

4. L'entreprise doit produire 1,95 centaines d'objets pour réaliser une marge brute positive soit 195 objets.

