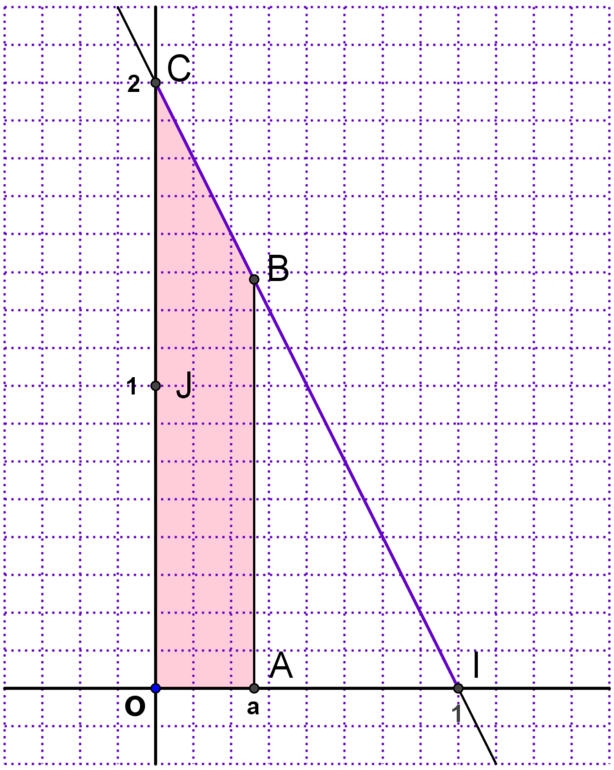
Exercice 4 — 3 points

Soit f la fonction définie sur [0;1] par : $f(x)=2-2x$.
On a tracé ci-dessous la droite D_f, la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;I;J)$ du plan.
Le point C a pour coordonnées $(0;2)$.
Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC.
Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1, on note A le point de coordonnées $(a;0)$ et B le point de D_f de coordonnées $(a;f(a))$.
Le but de cet exercice est de trouver la valeur de a, telle que le segment [AB] partage Δ en deux parties de même aire.
Déterminer la valeur exacte de a, puis une valeur approchée au centième.



CORRECTION

Le repère $(O;I;J)$ est orthonormé.
Le triangle OCI est rectangle en O, et $OI=1$ et $OC=2$. Donc l'aire de Δ en unité d'aire est :
$\frac{OI\times OC}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1$ U.A.

$1^{ère}$ méthode
Remarque : f est positive sur [0;1].
[AB] partage Δ en deux parties de même aire si et seulement si l'aire du quadrilatère (trapèze rectangle) OCBA est égale à $\frac{1}{2}$ U.A..
Or l'aire du quadrilatère OCBA est l'aire de la partie de plan comprise entre la courbe représentative de f l'axe des abscisses et les droites d'équations : x=0 et x=a, soit $\int_0^a f(x)\,dx$.

$f(x)=2-2x$
$F(x)=2x-x^2$
F est une primitive de f sur [0;1].
$\int_0^a f(x)\,dx= F(a)-F(0)=2a-a^2-0=2a-a^2$

On veut avoir : $2a-a^2=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 4a-2a^2=1 \Leftrightarrow 2a^2-4a+1=0$
$\Delta=14-4\times 2=8=(2\sqrt{2})^2$
$a_1=\frac{4-2\sqrt{2}}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
$a_2=\frac{4+2\sqrt{2}}{4}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
On a : $0<a_1<1$ et $a_2>1$
Donc la valeur de a est : $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ = 0,29 à 10^{-2} près.

$2^{ème}$ Méthode
Les droites (AB) et (OC) sont parallèles, on obtient donc une configuration de Thalès et on peut écrire $\frac{AI}{OI}=\frac{AB}{OC}$
AI=1-a ; OI=1 et OC=2
$\frac{1-a}{1}=\frac{AB}{2}$ et $AB=2(1-a)$
L'aire du triangle IAB rectangle en A est : $\mathscr{A} = \frac{AB\times AI}{2}=\frac{2(1-a)(1-a)}{2}$
$\mathscr{A} = (1-a)^2=a^2-2a+1$
On veut ; $\mathscr{A} = \frac{1}{2}$
$a^2-2a+1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^2-4a+1=0$
et on obtient $a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ = 0,29 à 10^{-2} près.