

Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement spécialité 5 points

Depuis le 1^{er} janvier 2015, une commune dispose de vélos en libre service. La société Bicycl'Aime est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos.

La commune disposait de 200 vélos au 1^{er} janvier 2015.

La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégra-dations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.

On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1^{er} janvier de l'année 2015+n .

1. Déterminer le nombre de vélos au 1^{er} janvier 2016.
2. Justifier que la suite (u_n) est définie par $u_0=200$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1}=0,85u_n+42$.
3. On donne l'algorithme suivant :

Variables : N entier
U réel

Initialisation : N prend la valeur 0
U Prend la valeur 200

Traitement : Tant que N < 4
U prend la valeur $0,85 \times U + 42$
N prend la va valeur N+1
Fin Tant que

Sortie : Afficher U

- a. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?

U	200				
N	0	1	2	3	4
condition N<4	Vrai				

- b. Interpréter la valeur du nombre U à l'issue de l'exécution de cet algorithme.
4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 280$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = -80$.
 - b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = -80 \times 0,85^n + 280$.
 - d. Calculer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat.

5. La société Bicycl'Aime facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1^{er} janvier.

Déterminer le coût total pour la période du 1^{er} janvier 2015 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite (u_n) étant exprimé avec un nombre entier.

CORRECTION

1. Pendant l'année 2015, 15 % des vélos sont dégradés et retirés de la circulation, soit $200 \times 0,15 = 30$ et 42 vélos sont mis en service donc le nombre de vélos au 1^{er} janvier 2016 est : $200 - 30 + 42 = 212$.

2. Pour tout entier naturel n

u_n est le nombre de vélos que la société Bicycl'Aime dispose au 1^{er} janvier 2015+n .
 u_{n+1} est le nombre de vélos que la société Bicycl'Aime dispose au 1^{er} janvier 2015+n+1 .
 Pendant l'année 2015+n , 15 % des vélos sont dégradés et retirés de la circulation soit : $0,15 \times u_n$ et 42 nouveaux vélos sont mis en circulation donc $u_{n+1} = u_n - 0,15 \times u_n + 42$.
 $u_{n+1} = (1 - 0,15) u_n + 42 = 0,85 u_n + 42$.

3.a. A la fin de la première boucle

$U = 212 \quad N = 1 \quad N < 4$ donc Vrai

. A la fin de la deuxième boucle

$212 \times 0,85 + 42 = 222,2$

$U = 222 \quad N = 2 \quad N < 4$ donc Vrai

. A la fin de la troisième boucle

$222 \times 0,85 + 42 = 230,7$

$U = 231 \quad N = 3 \quad N < 4$ donc Vrai

. A la fin de la quatrième boucle

$231 \times 0,85 + 42 = 238,35$

$U = 238 \quad N = 4 \quad N \geq 4$ donc Faux

On donne les résultats dans le tableau

U	200	212	222	231	238
N	0	1	2	3	4
condition $N < 4$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

b. Au 1^{er} janvier 2015+4=2019 , la société dispose de 238 vélos.

4.a. Pour tout entier naturel n

$v_n = u_n - 280$ donc $u_n = v_n + 280$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 280 = 0,85 u_n + 42 - 280 = 0,85 (v_n + 280) - 238 = 0,85 v_n + 238 - 238 = 0,85 v_n$

(v_n) est la suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = u_0 - 280 = 200 - 280 = -80$

b. Pour tout entier naturel n

$v_n = v_0 q^n = -80 \times 0,85^n$

c. Pour tout entier naturel n

$u_n = v_n + 280$ donc $u_n = -80 \times 0,85^n + 280$

d. $0 < 0,85 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 280$

Dans un avenir lointain la société Bicycl'Aime disposera de 280 vélos chaque année.

5. Le coût total pour la période du 1^{er} janvier 2015 au 31 décembre 2019 est égal :

$300 \times 200 + 300 \times 212 + 300 \times 222 + 300 \times 231 + 300 \times 238 = 300 \times (200 + 212 + 222 + 231 + 238)$

$300 \times 1103 = \underline{\underline{330\,300 \text{ €}}}$