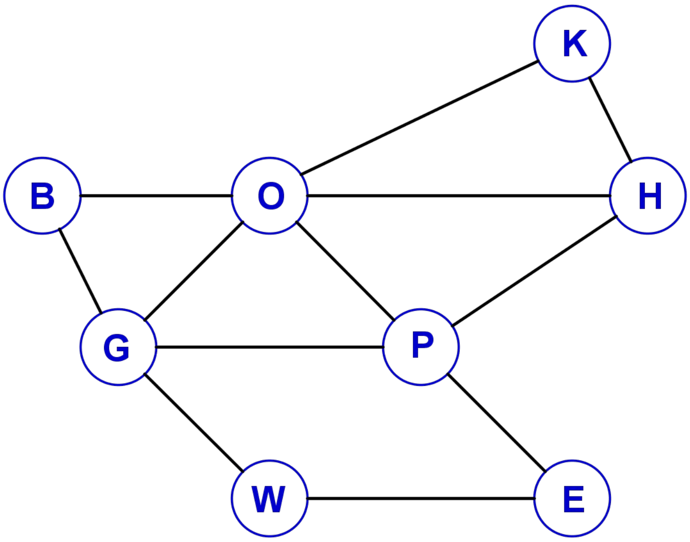
Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement spécialité 5 points

On a schématisé ci-dessus une partie du plan du métro londonien par un graphe Γ dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations.
Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.



LEGENDE:

B: Bond Street
E: Embankment
G: Green Park
H: Holborn
K: King's Cross St Pancras
O: Oxford Circus
P: Picadilly Circus
W: Westminster

1.a. Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.

b. Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.

2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui donner une telle chaîne.

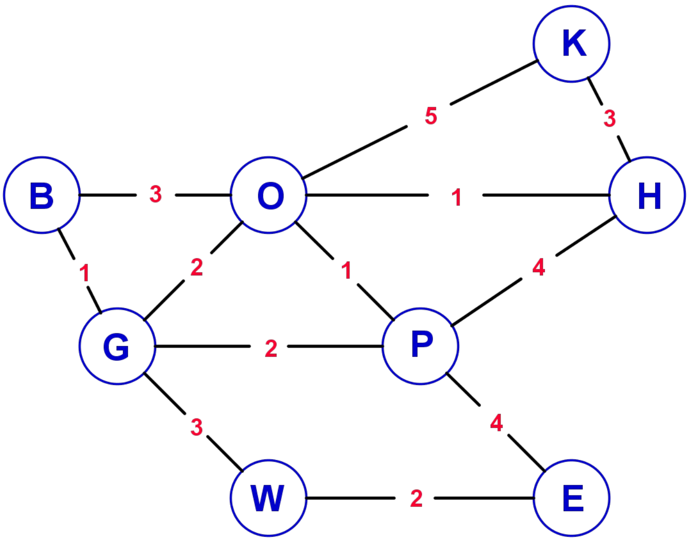
3. Donner la matrice d'adjacence du graphe Γ (les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique).

Pour la suite de l'exercice, on donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.

a. Sans utiliser le graphe, donner le nombre de trajets de trajets possibles et justifier la réponse.

b. Donner les trajets possibles.



LEGENDE:

B: Bond Street
E: Embankment
G: Green Park
H: Holborn
K: King's Cross St Pancras
O: Oxford Circus
P: Picadilly Circus
W: Westminster

Sur le graphe pondéré ci-dessus, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station (la durée est indiquée sur chaque arête du graphe Γ).

5. A partir de la station Westminster, ce touriste doit rejoindre la station King's Cross St Pancras le plus rapidement possible pour prendre un train.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet permettant de relier la station Westminster à la station King's Cross St Pancras en une durée minimale. On précisera cette durée.

CORRECTION

1.a. Il existe une chaîne passant par tous les sommets de ce graphe, exemple : HKOBGWEP donc il existe toujours une chaîne reliant deux sommets distincts donc le graphe est connexe.
b. Les sommets K et W ne sont pas relié par une arête donc le graphe n'est pas complet.

2. **Théorème d'Euler**
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
Un graphe convexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 (tous les sommets ont un degré pair).
. On détermine le degré de tous les sommets du graphe.
On donne les résultats sous la forme d'un tableau.

Sommets	B	E	G	H	K	O	P	W
degrés	2	2	4	3	2	5	4	2

Il n'y a que deux sommets de degré impair donc il existe au moins une chaîne eulérienne (mais il n'existe pas de cycle eulérien).
Exemple de chaîne eulérienne : **H**OBGOPGWEPHK**O.**

3. Les sommets sont rangés selon l'ordre alphabétique.
La matrice adjacente du graphe Γ est une matrice carrée à 8 lignes et 8 colonnes.
Pour la première ligne :
Il n'y a pas d'arête reliant B à B donc le 1^{er} coefficient est **0**.
Il n'y a pas d'arête reliant B à E donc le $2^{ème}$ coefficient est **0**.
Il y a une arête reliant B à G donc le $3^{ème}$ coefficient est **1**.
Il n'y a pas d'arête reliant B à H donc le $4^{ème}$ coefficient est **0**.
Il n'y a pas d'arête reliant B à K donc le $5^{ème}$ coefficient est **0**.
Il y a une arête reliant B à O donc le $6^{ème}$ coefficient est **1**.
Il n'y a pas d'arête reliant B à P donc le $7^{ème}$ coefficient est **0**.
Il n'y a pas d'arête reliant B à W donc le $8^{ème}$ coefficient est **0.**
Même raisonnement pour les autres lignes.

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On nous donne la matrice M^3 .
Par exemple, nous savons que le $3^{ème}$ coefficient de la $1^{ère}$ ligne ($1^{ère}$ colonne) : 6 représente le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à G.
a. On nous demande de déterminer le nombre de chaîne de longueur 3 reliant H à G. On détermine le $3^{ème}$ coefficient de la $4^{ème}$ ligne (ou $4^{ème}$ colonne), on obtient 4.
Donc il existe 4 trajets possibles en prenant 3 lignes de métro.

b. **HOBG**
HOPG
HPOG
HKOG

5. On utilise l'algorithme de DIJKSTRA, on donne le résultat sous la forme d'un tableau.

W	B	E	G	H	K	O	P
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
W(0)	∞	W(2)	W(3)	∞	∞	∞	∞
	∞	W(2)	W(3)	∞	∞	∞	E(6)
	G(4)		W(3)	∞	∞	G(5)	G(5)
	G(4)			∞	∞	G(5)	G(5)
				O(6)	O(10)	G(5)	G(5)
				O(6)	O(10)		G(5)
				0(6)	H(9)		
					H(9)		

La durée minimale est : **9 mn.**
Le trajet est : **WGOHK .**