Exercice 3 — 5 points

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Dans cet exrcice,les résultats seront arrondis au millième.

Partie A

Une entreprise spécialisé dans la fabrication de confitures fait appel àdes producteurs locaux.
A la livraison, l'entreprise effectue un contrôle qualité à l'ssue duquel les fruits sont sélectionnés ou non pour la préparation des confitures.
Une étude statistique a établi que :
. 22 % des fruits livrés sont issus de l'agriculture biologique ;
. parmi les fruits issus de l'agriculture biologique, 95 % sont sélectionnés pour la préparation des confitures ;
. parmi les fruits non issus de l'agriculture biologique, 90 % sont sélectionnés pou la préparation des confitures.

On prélève au hasard un fruit et on note :
B l'événement « le fruit est issu de l'agriculture biologique » ;
S l'événement « le fruit est sélectionné pour la préparation des confitures ».

Pour tout événement E, on note $P(E)$ sa probabilité, $P_F(E)$ la probabilité de l'événement E sachant que l'événement F est réalisé et $\bar{E}$ événement contraire de E.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Déterminer la probabilité que le fruit soit selectionné pour la préparation des confitures et qu'il soit issu de l'agriculture biologique.

3. Montrer que $P(S)=0{,}911$

4. Sachant que le fruit a été sélectionné pour la préparation des confitures, déterminer la probabilité qu'il ne soit pas issu de l'agriculture biologique.

Partie B

Cette entreprise conditionne la confiture en pots de 300 grammes.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque pot de confiture, associe sa masse en grammes.
On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu=300$ et d'écart type $\sigma=2$.
L'entreprise ne commercialise les pots de confiture que si l'écart entre la masse affichée (c'est à dire 300 g) et la masse réelle ne dépasse pas 4 grammes.

1. On prélève un pot au hasard. Déterminer la probabilité que le pot soit commercialisable.

2. Déterminer le réel a tel que $P(X<a)=0{,}01$.

Partie C

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.
Le directeur commercial affirme que 90 % des consommateurs sont satisfaits de la qualité des produits commercialisés par son entreprise.
On réalise une étude de satisfaction de 130 personnes.
Parmi les personnes interrogées, 15 déclarent ne pas être safaites des produits.

Déterminer, en justifiant, si l'on doit remettre en question l'affirmation du directeur commercial.

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé précise :

. « 22 % des fruits sont issus de l'agriculture biologique » donc $P(B)=0{,}22$.

Conséquence :

$P(\bar{B})=1-P(B)=1-0{,}22=0{,}78$.

. « Parmi les fruits issus de l'agriculture biologique, 95 % sont sélectionnés pour la préparation des confitures » donc $P_B(S)=0{,}95$.

Conséquence :

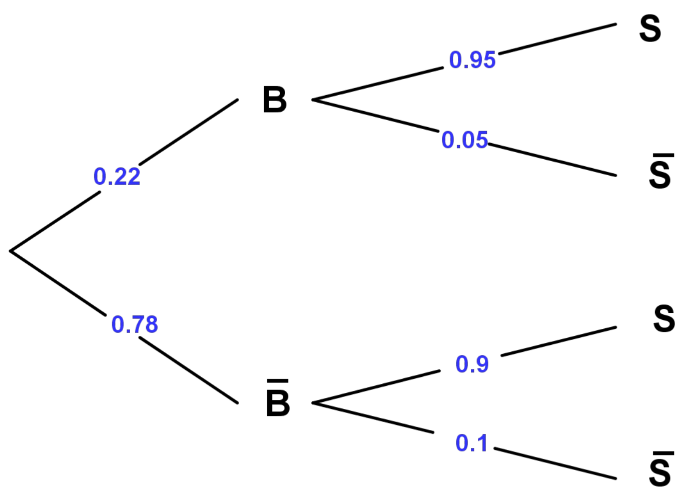
$P_B(\bar{S})=1-P_B(S)=1-0{,}95=0{,}05$

. « Parmi les fruits non issus de l'agriculture biologique, 90 % sont sélectionnés pour la préparation des confitures » donc $P_{\bar{B}}(S)=0{,}9$.

Conséquence :

$P_{\bar{B}}(\bar{S})=1-P_{\bar{B}}(S)=1-0{,}9=0{,}1$.

On obtient l'arbre pondéré :



2. On nous demande de calculer : $P(S\cap B)$

$P(S\cap B)=P(B)\times P_B(S)=0{,}22\times 0{,}95$ = **0,209**

3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule desprobabilités totales, on obtient :

$P(S)=P(S\cap B)+P(S\cap \bar{B})$

$P(S\cap B)=0{,}209$

$P(S\cap \bar{B})=P(\bar{B})\times P_{\bar{B}}(S)=0{,}78\times 0{,}9=0{,}702$

$P(S)=0{,}209+0{,}702$ = **0,911**

4. On nous demande de calculer $P_S(\bar{S})$

$P_S(\bar{B})=\frac{P(S\cap \bar{B})}{P(S)}=\frac{0{,}702}{0{,}911}=\frac{702}{911}$ = **0,702.**

Partie B

1. Le pot est commercialisable lorsque $300-4\leqslant X\leqslant 300+4$ c'est à dire $296\leqslant X\leqslant 304$.

On doit déterminer $P(296\leqslant X\leqslant 304)$.

On peut utiliser la calculatrice ou remarquer que : $296=\mu-2\sigma$ et que $304=\mu+2\sigma$.

Or $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant \mu+2\sigma)=0{,}954$ (résultat à connaître).

Conséquence :

$P(296 \leqslant X \leqslant 306)$ = **0,954.**

2. Pour déterminer a tel que $P(X<a)=0{,}01$, on utilise la calculatrice et on obtient $a=295{,}35$.
Pour l'exercice on arrondit à **a = 395 g**.

Conséquence :

La probabilité que la masse d'un pot soit inférieure à 395 g est 0,01.

Partie C

La proportion des consommateurs non satisfaits dans l'échantillon de 130 personnes est $\frac{15}{130}=\frac{3}{26}$

Donc la proportion des consommateurs satisfaits dans l'échantillon est f = $1-\frac{3}{26}=\frac{23}{26}$ = 0,885 à 10^{-3} près.

Pour le directeur commercial 90 % des consommateurs sont satisfaits donc la probabilité pour qu'un client pris au hasard, dans l'ensemble des consommateurs, d'être satisfait est : p = 0,9.

Le nombre des consommateurs étant très important, on peut supposer que les tirages des consommateurs, pour l'échantillon, sont effectués avec remise.

Pour l'échantillon : $n=130\geqslant 30$; $np=130\times 0{,}9=117\geqslant 5$; $n(1-p)=130\times 0{,}1=13\geqslant 5$.

On peut considérer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I_{130}=\left[p-1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$I_{130}=[0{,}9-1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}09}}{\sqrt{130}};0{,}9+1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}09}}{\sqrt{130}}]$$

$1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}09}}{\sqrt{130}}$ = 0,052 à 10^{-3} près.

$I_{130}=[0{,}848;0{,}952]$.

Or 0,885 appartient à cet intervalle donc on ne doit pas remettre en question l'affirmation du directeur commercial.