Exercice 4 — 6 points

Les partie A et B ne sont pas indépendantes

Partie A
On considère la fonction f définie sur $[1;11]$ par
$f(x)=-0,5x^2+2x+15\ln x$

1. Montrer que $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+15}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;11]$. on donnera les valeurs exactes des éléments du tableau.

3.a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;11]$.
b. Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.
c. Déterminer le signe $f(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle [1;11].

4.a. on considère la fonction F définie sur [1;11] par
$F(x)=\dfrac{1}{6}x^3+x^2-15x+15x\ln x$
Montrer que F est une primitive de f.
b. Calculer $\int_1^{11} f(x)\,dx$. On donnera le résultat exact puis sa valeur arrondie au centième.
c. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [1;11]. (On donnera la valeur arrondie au centième.)

Partie B
Une société fabrique et vend des chaises de jardin. La capacité de production mensuelle est comprise entre 100 et 1100 chaises.
Le bénéfice mensuel réalisé par la société est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre de centaines de chaises de jardin produites et vendues et f(x) représente le bénéfice mensuel mensuel exprimé en milliers d'euros.
On précise qu'un bénéfice peut-être positif ou négatif, ce qui correspond, dans ce deuxième cas, à une perte.

1. Quelles quantités de chaises la société doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel positif ?

2. Déterminer le nombre de chaises que la société doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.

<u>CORECTION</u>

Partie A

Pour tout nombre réel de l'intervalle $[1;11]$
$f(x)=-0,5x^2+2x+15\ln x$

1. On a $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

donc $f'(x)=-0,5\times(2x)+2\times1+15\times\dfrac{1}{x}=-x+2+\dfrac{15}{x}=\dfrac{-x^2+2x+15}{x}$

2. Le signe de $f'(x)$ sur $[1;11]$ est le signe de $N(x)=-x^2+2x+15$ sur $[1;11]$.
On détermine le signe du trinôme $N(x)=-x^2+2x+15$.
$\Delta=4-4\times(-1)\times15=64=8^2$
$x'=\dfrac{-2-8}{-2}=5$ et $x''=\dfrac{-2+8}{-2}=-3$.
On donne le signe de N(x) sous la forme d'un tableau et on déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
Signe de N(x)		−	0	+	0	−	

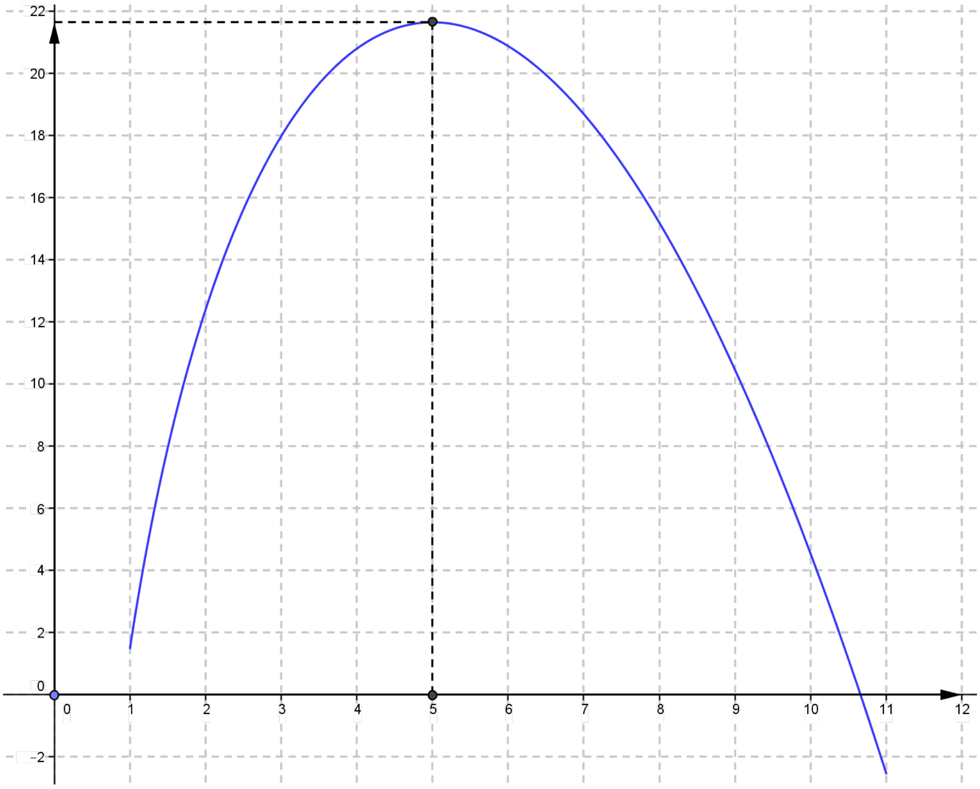
on a -3 < 1 < 5 <11 donc

x	1		5		11
f '(x)		+	0	−	
f(x)	1.5	↗	f(5)	↘	f(11)

$f(1)=1,5$; $f(5)=-0,5\times25+2\times5+15\ \ln\ 5=-2,5+15\ \ln\ 5$; $f(5)=21,642$ à 10^{-3} près.
$f(11)=-0,5\times121+2\times11+15\ \ln\ 11=-38,5+15\ \ln\ 11$; $f(11)=-2,53$ à 10^{-3} près.

3.a. f est strictement croissante sur l'intervalle [1;5] et f(1,5)=1,5 donc pour tout nombre réel x appartenant à [1;5] on a $1,5=f(x)$ donc $0<f(x)$.
<u>Conséquence</u>
L'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1;5]$.
. f est dérivable et dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle [5;11], $f(5)=21,642>0$ et $f(11)=-2,592<0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une solutions unique α dans l'intervalle $[5;11]$.

b. On doit utiliser la calculatrice pour trouver une valeur approchée de α .
On peut obtenir facilement la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice, ici on joint la courbe représentative de f (non demandée).



α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et l'axe des abscisses donc graphiquement on obtient comme encadrement de α : $10<\alpha<11$.
En utilisant la calculatrice :
$f(10)=4{,}54>0$ (à 10^{-2} près) $f(11)=-2{,}53<0$
$f(10{,}6)>0$ et $f(10{,}7)<0$
donc $10{,}6<\alpha<10{,}7$
$f(10{,}65)>0$ et $f(10{,}67)<0$
et $f(10{,}66)=0{,}00$ à 10^{-2} près.

c. Nous avons vu que pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;5] on a $0<f(x)$.
Sur l'intervalle [5;11], f est stictement décroissante donc :
Si $5\leqslant x<\alpha$ alors $f(5)\geqslant f(x)>f(\alpha)=0$.
Si $\alpha<x\leqslant 11$ alors $f(\alpha)=0>f(x)\geqslant f(11)$.
On donne le signe de f(x) sous la forme d'un tableau.

4.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;11] : $F(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2-15x+15x\ \ln x$

<u>Remarque</u>
$(x\ \ln x)'=1\times \ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

donc $F'(x)=-\frac{1}{6}(3x^2)+2x-15+15(\ln x+1)=-\frac{1}{2}x^2+2x-15+15\ln x+15$

$F'(x)=-0{,}5x^2+2x+15\ln x=f(x)$
F est une primitive de f sur [1;11].

b. $I=\int_1^{11} f(x)\,dx = F(11)-F(1)$

$F(1)=-\frac{1}{6}+1-15=\frac{-85}{6}$

$F(11)=\frac{-1331}{6}+121-165+165\ \ln\ 11=\frac{-1331}{6}-44+165\ \ln\ 11=\frac{-1595}{6}+165\ \ln\ 11$

$I=\frac{-1595}{6}+165\ \ln\ 11+\frac{85}{6}=\frac{-1510}{6}+165\ \ln 11=\frac{-755}{3}+165\ \ln\ 11$

$I=143{,}99$ à 10^{-2} près.

c. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [1;11] est égal à $\mu=\frac{1}{11-1}\int_1^{11} f(x)\,dx$

$\mu=\frac{1}{10}I=\frac{143{,}99}{10}=14{,}40$ à 10^{-2} près.

Partie B

1. Le bénéfive mensuel est positif ou nul si et seulement si $1\leqslant x\leqslant\alpha$.
$\alpha=10{,}66$ à 10^{-2} près.
Donc la société doit produire entre 100 chaises et 1066 chaises pour avoir un bénéfice positif ou nul.

2. Le bénéfice est maximal pour x = 5 donc pour une production de 500 chaises, le bénéfice est maximal, ce bénéfice maximal est égal à 21 642€.