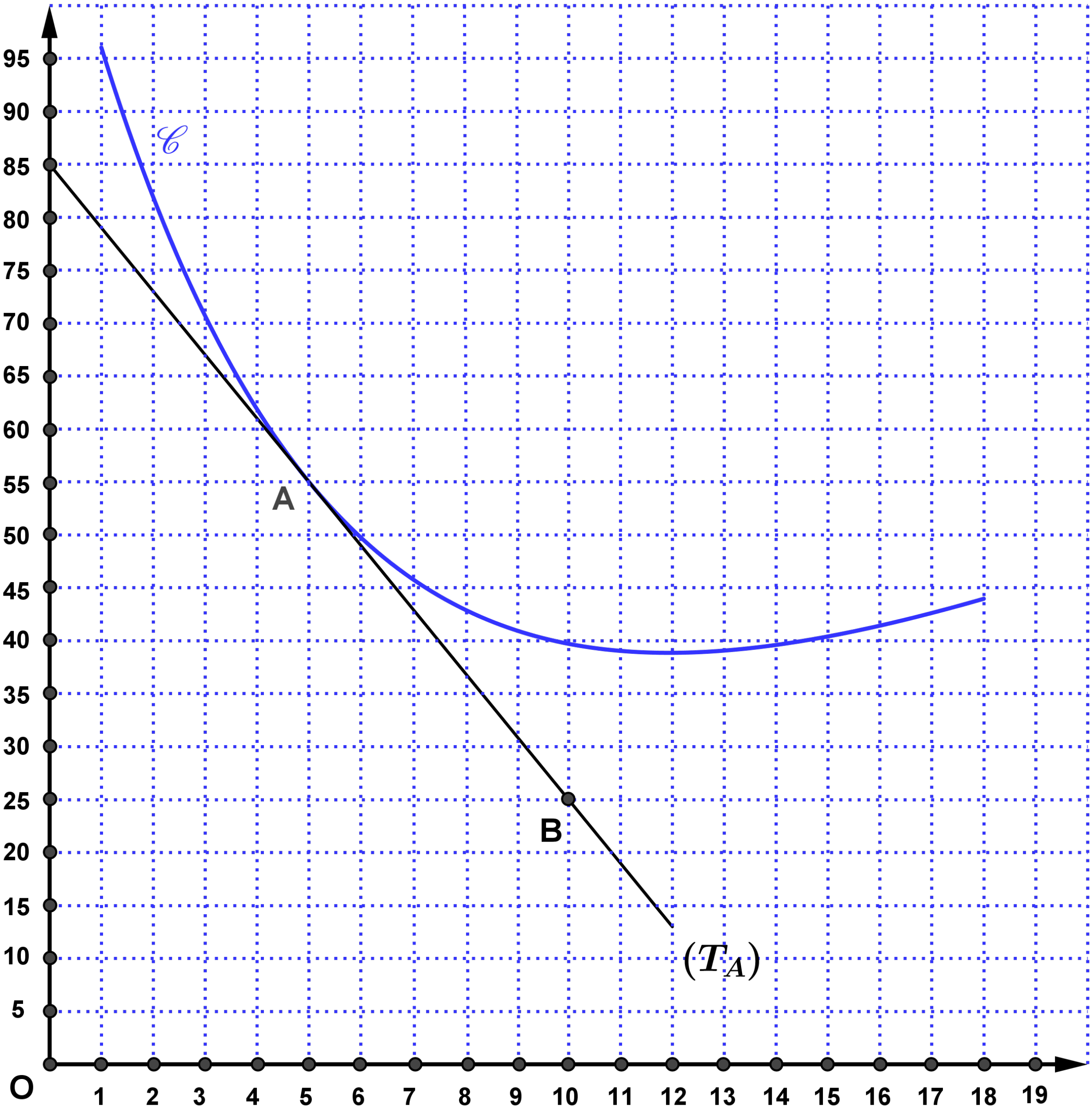
Exercice 2 5 points

Une entreprise artisanale produit des parasols. Elle en fabrique entre 1 à 18 par jour. Le coût de fabrication unitaire est modélisé par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1;18]$.
On note x le nombre de parasols produits par jour et $f(x)$ le coût de fabrication unitaire exprimé en euros.
Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la tangente (T_A) au point $A(5;55)$. Le point $B(10;25)$ appartient à la tangente (T_A).



On admet que : $f(x)=2x+5+40e^{-0,2x+1}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;18]$.

1.a. Déterminer graphiquement la valeur de $f'(5)$ en expliquant la démarche utilisée.

b. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;18]$.

c. Expliquer comment retrouver la réponse obtenue dans la question **1.a.**

2.a. Montrer que $2-8\mathrm{e}^{-0,2x+1}\geqslant 0$ est équivalente à $x\geqslant 5+5\ln 4$.
b. En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $[1;18]$. Les valeurs seront arrondies au centime d'euro dans le tableau de variations.

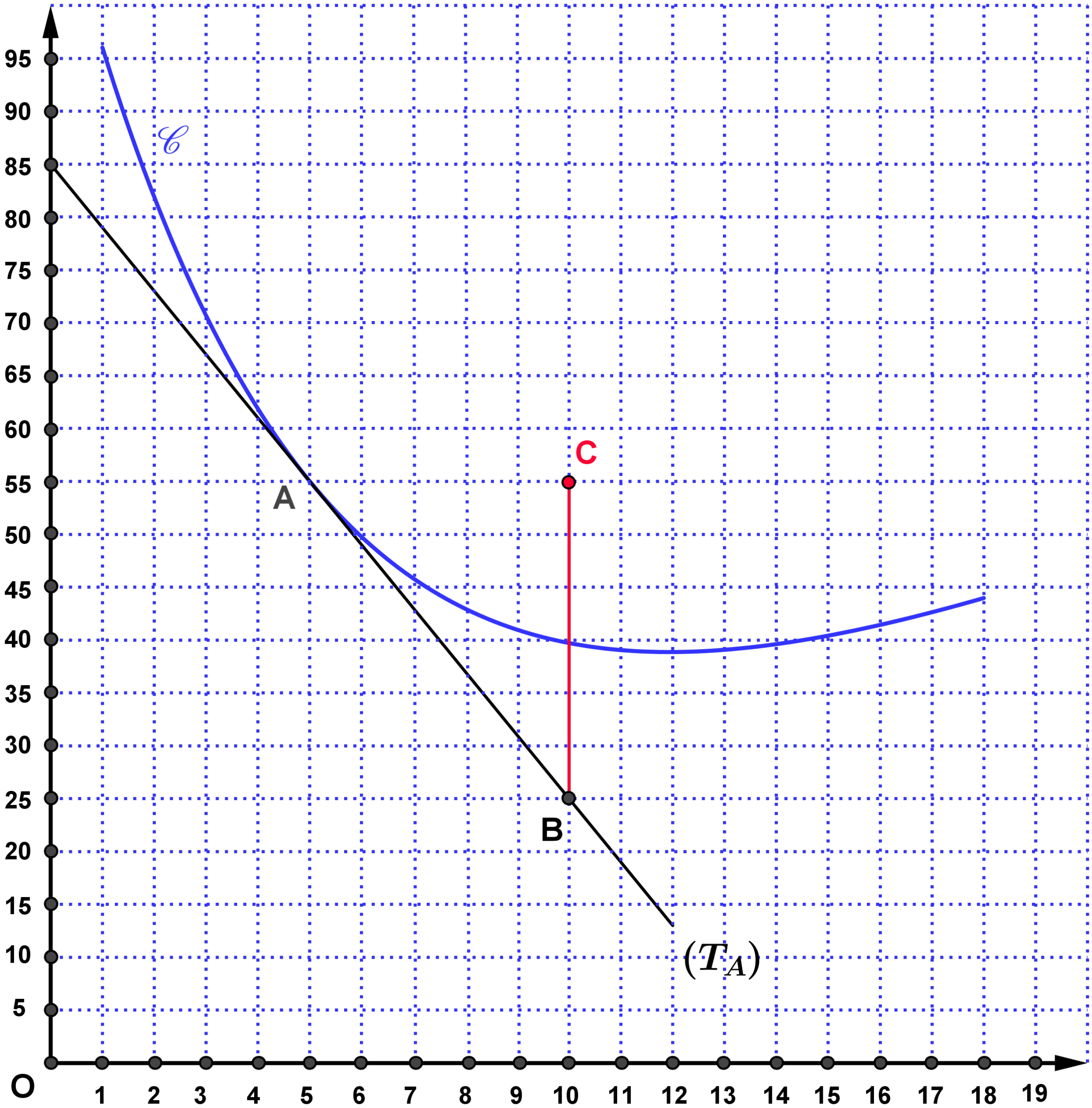
3. Déterminer, par le calcul, le nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal.

4.a. Montrerque la fonction F définie par $F(x)=x^2+5x-200\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[1;18]$.
b. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $I=\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.
c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de $\frac{1}{10}I$.

CORRECTION

1.a. (T_A) est la tangente en $A(5;55)$ à la courbe $\mathscr{C}$ donc le cefficient directeur de (T_A) est $f'(5)$. Or $(T_A)=(AB)$, on détermine graphiquement le coefficient directeur de (AB). Soit C le point de coordonnées $(10;55)$, le coefficient directeur de (AB) est égal : $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{25-55}{.10-5}=\frac{-30}{5}=-6$.

(Attention le repère n'est pas orthonormé, on ne peut pas écrire : $-\frac{BC}{AC}$).



Conclusion
$f'(5)=-6$

b. Rappel :
$(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-0,2x+1})'=-0,2e^{-0,2x+1}$ (avec u(x) = -0,2x+1)
f est dérivable sur $[1;18]$ et $f'(x)=2+40(-0,2e^{-0,2x+1})=2-8e^{-0,2x+1}$.

c. $f'(5)=2-8e^{-0,2\times5+1}=2-8e^0=2-8=-6$.
(On retrouve le résultat précédent).

2.a. $2-8e^{-0,2x+1}\geqslant 0 \Leftrightarrow 2\geqslant 8e^{-0,2x+1}\Leftrightarrow \frac{2}{8}\geqslant e^{-0,2x+1}\Leftrightarrow \frac{1}{4}\geqslant e^{-0,2x+1}$.

La fonction logarithme néperien est croissante sur $[1;18]$ donc :

$$2-8e^{-0,2x+1}\geqslant 0\Leftrightarrow \ln\frac{1}{4}\geqslant \ln e^{-0,2x+1}\Leftrightarrow -\ln 4\geqslant -0,2x+1\Leftrightarrow 0,2x\geqslant 1+\ln 4\Leftrightarrow x\geqslant\frac{1+\ln 4}{0,2}=5+5\ln 4 .$$

b. $f'(x)=2-8e^{-0,2x+1}$

$5+5\ln 4-11,93$ **à** 10^{-2} près donc 5+5ln4 appartient à l'intervalle $[1;18]$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=5+5\ln 4$

$f'(x)>0\Leftrightarrow 18\geqslant x>5+5\ln 4$

$f'(x)<0\Leftrightarrow 1\leqslant x<5+5\ln 4$

x	1		5+5ln4		18
f'(x)		-	0	+	
f(x)	f(1)	↘	f(5+5ln4)	↗	f(18)

Tableau de variations de f

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$f(5\ln 4+5)=38,86$ à 10^{-2} près

$f(1)=96,02$ à 10^{-2} près

$f(18)=43,97$ à 10^{-2} près

3. On a $5+5\ln 4=11,93$ à 10^{-2} près

Il faut donc fabriquer 12 parasols (dans une journée) pour avec le coût moyen de fabrication minimal d'un parasol ($f(12)=38,86$ à 10^{-2} près).

Ce prix minimal est : 38,86 €.

4.a. $F(x)=x^2+5x-200(e^{-0,2x+1})$

F est dérivable sur $[1;18]$

$F'(x)=2x+5-200(-0,2e-0,2x+1)=2x+5+200\times 0,2e^{-0,2x+1}=2x+5+40e^{-0,2x+1}=f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $[1;18]$.

b. $I=\int_5^{15} f(x)\,dx=(15)-F(5)$

$I=15^2+5\times 15-200e^{-0,2\times 15+1}-5^2-5\times 5+200e^{-0,2\times 5+1}$

$I=225+75-200e^{-2}-25-25+200e^0$

$I=450-200e^{-2}$

c. $\frac{1}{10}I=\frac{1}{15-5}\int_5^{15} f(x)\,dx$ donc $\frac{1}{10}I$ est la valeur mpyenne de f sur l'intervalle $[5;15]$.

Interprétation

Pour une production journalière comprise entre 5 et 15 parasols, le coût moyen de la fabrication d'un parasol en euros est $\frac{1}{10}I$.

La calculatrice donne: 42,29 €.