## Exercice 3 6 points

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment.
*Les résultats seronr arrondis,si nécessaire, à* $10^{-3}$.
Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires.
La totalité de la production est réalisée par deux machines $M_A$ et $M_B$.
La machine $M_A$ fournit 40 % de la production et $M_B$ le reste.
La machine $M_A$ produit 2 % de médailles défectueuses et la machine $M_B$ produit 3 % de médailles défectueuses.

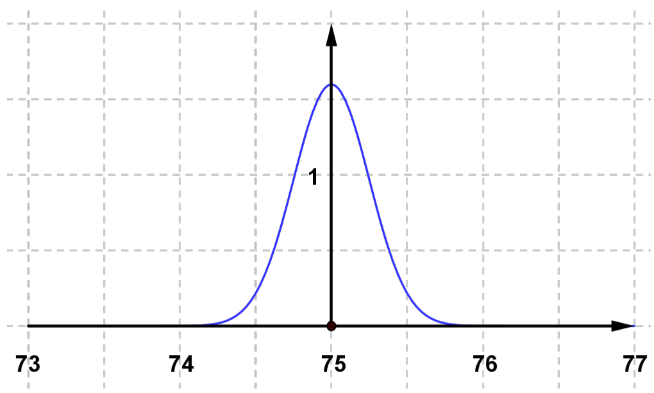
**Partie A**
On prélève au hasard une médaille produite par l'entreprise et on considère les événements suivants :
. A : « la médaille provient de la machine $M_A$ »
. B **:** « la médaille provient de la machine $M_B$ »
. D : « la médaille est défectueuse »
. $\bar{D}$ est l'événement contraire de l'événement D.

**1.a.** Traduire cette situation par un arbre pondéré.
**b.** Montrer que la probabilité qu'une médaille soit défectueuse est égale à 0,026.
**c.** Calculer la probabilité qu'une médaille soit produite par la machine $M_A$ sachant qu'elle est défectueuse.

**2.** Les médailles produites sont livrées par lots de 20.
On prélève au hasard un lot de 20 médailles dans la production.
On suppose que la production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélévement à un tirage aléatoire avec remise. Les tirages sont supposés indépendants.
On note X la variable prenant pour valeur le nombre de médailles défectueuses contenues dans ce lot.
**a.** Préciser la loi que suit X et donner ses paramètres.
**b.** Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une médaille défectueuse dans ce lot.

**Partie B**

Le diamètre exprimé en millimètre,d'une médaille fabriquée par une entreprise soit conforme lorsqu'il appartient à l'intervalle $[74{,}4\,;75{,}6]$.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque médaille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre enmillimètre. On suppose que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type 0,25.
La courbe ci-dessous est la représentationgraphique de la densité de probabilité de Y.




**1.** Indiquer par lecture graphique la valeur de μ.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

**2.** Déterminer à l'aide de la calculatrice la probabilité $P(74,4 \leqslant Y \leqslant 75,6)$.

**3.** En utilisant un résultat du cours, déterminer la valeur h pour que : $P(75-h \leqslant Y \leqslant 75+h)=0,95$.

**Partie C**
Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la machine $M_B$, on admet que la proportion des médailles ayant une épaisseur non conforme dans la production est de 3 %.
Pour contrôler le bon fonctionnement de la machine $M_B$, on a prélevé au hasard un échantillon de 180 médailles et on a constaté que 11 médailles ont une épaisseur non conforme.

**1.** Calculer, dans l'échantillon prélevé, la fréquence des médailles dont l'épaisseur n'est pas conforme.

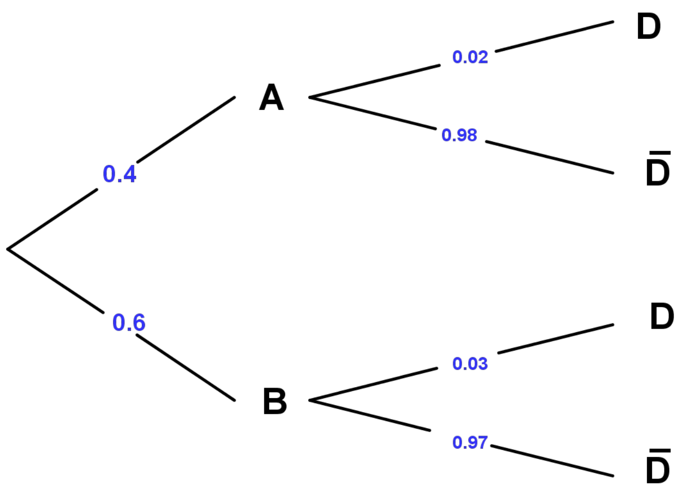
**2.** Déterminer, en justifiant, si le résultat de la question précédente rend pertinente la prise de décision d'arrêter la production pour procéder au réglage de la machine $M_B$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

**CORRECTION**

**Partie A**

**1.a.** « La machine $M_A$ fournit 40 % de la production totale et la machine $M_B$ le reste ».
Donc $B=\bar{A}$ et $P(A)=0,4$ et $P(B)=1-0,4=0,6$ .
« La machine $M_A$ produit 2 % de médailles défectueuses ».
Donc $P_A(D)=0,02$ et $P_A(\bar{D})=1-0,02=0,98$ .
« La machine $M_B$ produit 3 % de médailles défectueuses ».
Donc $P_B(D)=0,03$ et $P_B(\bar{D})=1-0,03=0,97$ .
On obtient l'arbre pondéré suivant :




**b.** En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :
$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)$
$P(D)=0,4\times 0,02+0,6\times 0,03=0,008+0,018=0,026$
**c.** On nous demande de calculer $P_D(A)$
$$P_D(A)=\frac{P(D\cap A)}{P(D)}=\frac{0,4\times 0,02}{0,026}=\frac{0,008}{0,026}=\frac{8}{26}=\frac{4}{13}$$
$P_D(A)=0,308$ à $10^{-2}$ près

**2.a.** Epreuve de Bernoulli
On prélève au hasard une médaille dans la production.
Succès S : « La médaille prélevée est défectueuse ».
$P(S)=P(D)=0,026$
Echec $\bar{S}$ : « La médaille prélevée n'est pas défectueuse ».
$P(\bar{S})=P(\bar{D})=1-0,026=0,974$
On effectue 20 épreuves que l'on suppose indépendantes. On obtient un schéma de Bernoulli de paramètres : n = 20 et p = 0.026.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 20 épreuves, la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres : 20 et 0,026.
**b.** On nous demande de calculer : $P(X\leqslant 1)$
$P(X\leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)$

$P(X=0)=0,974^{20}=0,5904$
$P(X=1)=\binom{20}{1}0,026\times 0,974^{19}=0,3152$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$P(X\leqslant 1)=0{,}906$

**Partie B**

**1.** Par lecture graphique : $\mu=75$ .

**2.** La calculatrice donne : $P(74{,}4\leqslant Y\leqslant 75{,}6)=0{,}984$

**3.** Nous avons comme résultat de cours :
Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}\ (\mu;\sigma^2)$ alors $P(\mu-2\sigma\leqslant Y\leqslant\mu+2\sigma)=0{,}95$ .
Pour l'exemple $\mu=75$ et h doit être égal à $2\sigma=2\times 0{,}25=0{,}5$
<u>Conclusion</u>
**h = 0,5**

**Partie C**

**1.** $f=\frac{11}{180}=0{,}061$

**2.** $n=180\geqslant 30$ **;** $p=0{,}03$ **;** $np=180\times 0{,}03=5{,}4\geqslant 5$ **;** $n(1-p)=180\times 0{,}97=174{,}6\geqslant 5$
On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I_{180}=\left[0{,}03-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}03\times 0{,}97}{180}};0{,}03+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}03\times 0{,}97}{180}}\right]$$

$$0{,}024\leqslant 1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}03\times 0{,}97}{180}}\leqslant 0{,}025$$

$[0{,}006;0{,}054]\subset I_{180}\subset[0{,}005;0{,}055]$ .
Or 0,61 n'appartient pas à $I_{180}$ , donc il est pertinent de procéder au réglage dela machine $M_B$ .

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés