Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 m^3 d'eau le 1^{er} juillet 2013 au matin.
La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 m^3 pour l'irrigation des culture aux alentours.
Cette situation peut être modelisée par une suite (u_n).
Le premier juillet 2013 au matin,le volume d'eau en m^3 est $u_0=100\,000$.
Pour tout entier naturel n supérieur à 0, u_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du $n^{ième}$ jour qui suit le 1^{er} juillet 2013.

1.a. Justifier que le volume d'eau u_1 au matin du 2 juillet 2013 est égal à 95 500 m^3.
b. Déterminer le volume d'eau u_2, au matin du 3 juillet 2013.
c. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}=0{,}96\,u_n-500$

2. Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on aa commencé par élaborer l'algrithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	u est un nombre réel
L2		n est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à u la valeur 100 000
L4		Affecter à n la valeur 0
L5		Tant que $u>0$
L6		Affecter à n la valeur **...**
L7		Affecter à u la valeur **...**
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher **...**

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n+12\,500$.
a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96. Préciser son premier terme.
b. Exprimer v_n en fonction de n.
c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=112\,500\times0{,}96^n-12\,500$.

4.a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112\,500\times0{,}96^n-12\,500\leqslant0$.
b. Interpréter ce résultat dans le contexe de l'énoncé.

CORRECTION

1.a. « La chaleur provoque dans la retenue d'eau une évaporation de 4 % du volume total d'eau par jour ».
Soit le premier jour : $0{,}04\times u_0=0{,}04\times 100\,000=4\,000\,m^3$.
« Chaque soir on doit libérer : $500\,m^3$. ».
Donc le volume d'eau au matin du 2 juillet 2015 est : $u_1=100000-4000-500=95500\,m^3$.
b. Le volume d'eau évaporé le 2 juillet est égal à : $0{,}04\times¿u_1=0{,}04\times 95500=3820\,m^3$.
Le volume d'eau au matin du 3 juillet 2015 est : $u_2=u_1-3820-500=91180\,m^3$.
c. n est un entier naturel.
u_n Désigne le volume d'eau en m^3 au matin du $n^{i\grave{e}me}$ jour qui suit le 1^{er} juillet.
Le volume d'eau au matin du $(n+1)^{i\grave{e}me}$ jour est :
$u_{n+1}=u_n-0{,}04\times u_n-0{,}04\,u_n-500=(1{,}0{,}04)\,u_n-500=0{,}96\,u_n-500$.

2. **L6** Affecter à n la valeur **n+1**
L7 Affecter à u la valeur **0,96xu-500**
L9 **Sortie :** Afficher **n**

3. Pour tout entier naturel n :
$v_n=u_n+12500$ (on a donc $u_n=v_n-12500$)
a. Pour tout entier naturel n :
$v_{n+1}=u_{n+1}+12500=0{,}96\,u_n-500+12500=0{,}96\,u_n+12000=0{,}96(v_n-12500)+12000$
$v_{n+1}=0{,}96\,v_n-0{,}96\times 11500+12000=0{,}96\,v_n$
donc (v_n) est la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme : $v_0=u_0+12500=112500$.
b. Pour tout entier naturel n :
$v_n=v_0\times q^n$
$v_n=112500\times 0{,}96^n$
c. Pour tout entier naturel n
$u_n=v_n-12500$
Soit $u_n=112500\times 0{,}96^n-12500$

4.a. $112500\times 0{,}96^n-12500\leqslant 0\Leftrightarrow 112500\times 0{,}96^n\leqslant 12500\Leftrightarrow 0{,}96^n\leqslant\dfrac{12500}{112500}=\dfrac{1}{9}$
La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$
$\Leftrightarrow \ln 0{,}96^n\leqslant \ln\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow n\ln 0{,}96-\ln 9$
Attention $0<0{,}96<1$ donc $\ln 0{,}96<0$
$\Leftrightarrow n\geqslant\dfrac{-\ln 9}{\ln 0{,}96}$
En utilisant la calculatrice : $\dfrac{-\ln 9}{\ln 0{,}96}=53{,}825$ à 10^{-3} près
n est un entier naturel
$\Leftrightarrow n\geqslant 54$
b. Interprétation
Au 54^{ime} jour au matin la retenue ne contiendra plus d'eau.

1^{er} août au matin $31^{\grave{e}me}$ jour
24 août au matin $54^{\grave{e}me}$ jour

Remarques
. On peut demander d'utiliser la calculatrice pour obtenir le résultat avec l'algorithme.

. Ici on vous propose de vérifier le résultat avec un tableur.

En A1 : 0 en B1 : 100000
En A2 : A1+1 en B2 : =0,96xB1-500
On étire (et on vérifie le résultat)

A	B	27	24865.93160
0	100000	28	23371.29434
1	95500	29	21936.44257
2	91180	30	20558.98486
3	87032.8	31	19236.62547
4	83051.488	32	17967.16045
5	79229.42848	33	16748.47403
6	75560.25134	34	15578.53507
7	72037.84129	35	14455.39367
8	68656.32764	36	13377.17792
9	65410.07453	37	12342.09080
10	62293.67156	38	11348.47089
11	59301.92469	39	10394.47089
12	56429.84770	40	9478.692050
13	53672.65379	41	8599.544368
14	51025.74764	42	7755.562593
15	48484.71773	43	6945.340090
16	46045.32902	44	6167.526486
17	43703.51586	45	5420.825427
18	41455.37523	46	4703.992409
19	39297.16022	47	4015.832713
20	37225.27381	48	3355.199405
21	35236.26286	49	2720.991428
22	33326.81234	50	2112.151771
23	31793.73985	51	1527.665700
24	29733.99026	52	966.5590724
25	28044.63065	53	427.8967095
26	26422.84542	54	-89.21915891