

Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G (standard de transmission de données).

Une étude a montré que d'une année à l'autre/

- . 41 % des clients de l'opérateur SAFIR le quittent pour l'opérateur TECIM.
- . 9 % des clients de l'opérateur TECIM le quittent pour l'opérateur SAFIR.
- . Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste \mathcal{G} de sommets S et T où :

- . S est l'événement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAPHIR ».
- . T est l'événement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM ».

Chaque année on choisit au hasard un utilisateur de la 4G et on note pour entier naturel n :

- . s_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en $2014+n$.
- . t_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en $2014+n$.

On note $p_n = (s_n \quad t_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2014+n$.

Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste \mathcal{G} .

2. On admet que la matrice de transition du graphe \mathcal{G} en considérant les sommets dans l'ordre

S et T est $M = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$.

On note $p = (a \quad b)$ la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe \mathcal{G} .

a. Montrer que les nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases} 0,41a - 0,09b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

b. Résoudre le système précédent.

3. On admet que $a = 0,18$ et $b = 0,82$. Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre l'objectif.

Partie B

En 2014, on sait que 35 % des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65 % sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi $p_0 = (0,35 \quad 0,65)$

1. Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $t_{n+1} = 0,5t_n + 0,41$.

3. Pour déterminer au bout de combien d'années l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-après. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1 Variables :	T est un nombre
L2	N est un nombre entier
L3 Traitement :	Affecter à T la valeur 0,65
L4	Affecter à N la valeur 0
L5	Tant que $T < 0,80$
L6	Affecter à T la valeur ...
L7	Affecter à N la valeur ...
L8	Fin Tant que
L9 Sortie :	Afficher ...

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = t_n - 0,82$.
- Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Préciser son premier terme.
 - En déduire que : $t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$.
 - Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $-0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geq 0,80$.
 - Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

CORRECTION

Partie A

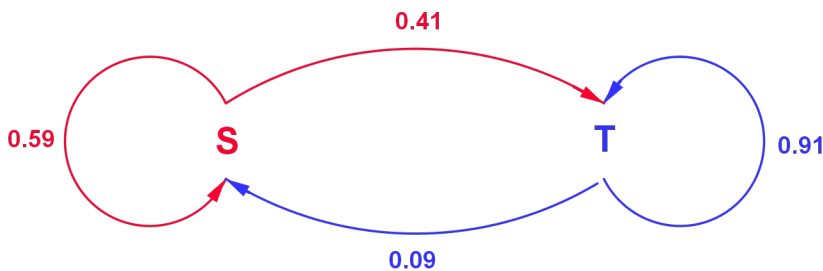
1. Chaque année, 41 % des clients de la 4G, de l'opérateur SAFIR, le quittent pour l'opérateur TECIM donc la probabilité qu'un client de l'opérateur SAFIR choisisse l'opérateur TECIM est :

0,41. Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G donc la probabilité qu'un client de l'opérateur SAFIR reste chez l'opérateur SAFIR est $1 - 0,41 = 0,59$.

De même, 9 % des clients de l'opérateur TECIM le quittent pour l'opérateur SAFIR donc la probabilité qu'un client de l'opérateur TECIM choisisse l'opérateur SAFIR est : 0,09 et la probabilité

qu'il reste chez l'opérateur TECIM est : $1 - 0,09 = 0,91$.

On construit le graphe probabiliste \mathcal{G}



2. L'ordre des sommets du graphe \mathcal{G} est S et T.

On admet que la matrice de transition du graphe \mathcal{G} est : $M = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$.

La matrice ligne $p = (a \quad b)$ représente l'état stable de ce graphe \mathcal{G} si et seulement si $pM = p$ et $a + b = 1$.

$$a. \quad pM = (a \quad b) \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix} = (0,59a + 0,09b \quad 0,41a + 0,91b)$$

$$pM = p \Leftrightarrow \begin{cases} 0,59a + 0,09b = a \\ 0,41a + 0,91b = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,41a - 0,09b = 0 \\ 0,41a - 0,09b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,41a - 0,09b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Donc $p = (a \quad b)$ représente l'état stable si et seulement si :

$$b. \quad 0,41a - 0,09(1 - a) = 0 \Leftrightarrow 0,41a - 0,09 + 0,09a = 0 \Leftrightarrow 0,5a = 0,09 \Leftrightarrow a = \frac{0,09}{0,5} = 0,18$$

et $b = 0,82$

$$p = (0,18 \quad 0,82)$$

3. $b = 0,82$ est la limite de la suite (t_n) lorsque n tend vers $+\infty$ donc t_n (pour n « assez » grand) sera supérieur ou égal à 0,80 et dans l'avenir l'opérateur TECIM aura au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n

$$p_n = (s_n \quad t_n) = p_0 M^n$$

$$p_0 = (0,35 \quad 0,65)$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,385 & 0,615 \\ 0,135 & 0,865 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = p_0 M^2 = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,385 & 0,615 \\ 0,135 & 0,865 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2225 & 0,7775 \end{pmatrix}$$

donc $s_2 = 0,2225$ et $t_2 = 0,7775$

Au bout de 2 ans : 22,25 % des clients de la 4G ont pour opérateur SAFIR et 77,75 % des clients de la 4G ont pour opérateur TECIM.

2. Pour tout entier naturel n :

$$p_{n+1} = p_n M$$

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} s_{n+1} = 0,59 s_n + 0,09 t_n \\ t_{n+1} = 0,41 s_n + 0,91 t_n \end{cases}$$

on a : $s_n + t_n = 1$ soit $s_n = 1 - t_n$

$$t_{n+1} = 0,41(1 - t_n) + 0,91 t_n = 0,41 - 0,41 t_n + 0,91 t_n = 0,5 t_n + 0,41$$

3. **L6** Affecter à T la valeur **0,5T+0,41**

L7 Affecter à N la valeur **N+1**

L9 Sortie : Afficher **N**

4.a. Pour tout entier naturel n

$$u_n = t_n - 0,82 \text{ soit } t_n = u_n + 0,82$$

$$u_{n+1} = t_{n+1} - 0,82 = 0,5 t_n + 0,41 - 0,82 = 0,5 t_n - 0,41 = 0,5(u_n + 0,82) - 0,41$$

$$u_{n+1} = 0,5 u_n + 0,41 - 0,41 = 0,5 u_n$$

(u_n) est la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme : $u_0 = t_0 - 0,82 = 0,65 - 0,82 = -0,17$.

b. Pour tout entier naturel n

$$u_n = u_0 q^n$$

$$u_n = -0,17 \times 0,5^n$$

$$\text{et } t_n = u_n + 0,82$$

$$t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$$

$$c. -0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geq 0,80 \Leftrightarrow 0,82 - 0,80 \geq 0,17 \times 0,5^n \Leftrightarrow \frac{0,02}{0,17} \geq 0,5^n \Leftrightarrow \frac{2}{17} \geq 0,5^n$$

La fonction logarithme népérien est croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{17} \geq \ln 0,5^n \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{17} \geq n \ln 0,5$$

Attention $0 < 0,5 < 1$ donc $\ln 0,5 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln \frac{2}{17}}{\ln 0,5} \leq n$$

En utilisant la calculatrice, on obtient

$$\frac{\ln \frac{2}{17}}{\ln 0,5} = 3,09 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

n est un entier naturel donc $n \geq 4$

L'ensemble des solutions de l'inéquation dans l'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à 4.

d. Interprétation

En $2014+4 = 2018$, l'opérateur TECIM aura réalisé son objectif pour la première année.