

Exercice 1

6 points

Le service marketing d'un magasin de téléphonie a procédé à une étude du comportement de sa clientèle. Il a ainsi observé que celle-ci est composée de 42 % de femmes, 35 % des femmes qui entrent dans le magasin y effectuent un achat, alors que cette proportion est de 55 % pour les hommes.

Une personne entre dans le magasin. On note :

. F l'événement : « La personne est une femme »

. R l'événement : « La personne repart sans rien acheter ».

Pour tout événement A, on note $\bar{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

Dans tout l'exercice, donner les valeurs approchées des résultats au millième.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Calculer la probabilité que la personne qui est entrée dans le magasin soit une femme et qu'elle repart sans rien acheter.

3. Montrer que $P(R) = 0,534$.

Partie B

Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone de type T_1 qu'il vient de s'offrir.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.

On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart type $\sigma = 10$.

1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est à dire 36 mois, est d'environ 0,885.

2. On sait que le téléphone de type T_1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?

Partie C

Le gérant du magasin émet l'hypothèse que 30 % des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires (housse, chargeur ...).

Afin de vérifier son hypothèse, le service marketing complète son étude.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de personnes ayant uniquement acheté des accessoires dans un échantillon de taille 1500.

2. Le service marketing interroge un échantillon de 1500 personnes. L'étude indique que 430 personnes ont acheté uniquement des accessoires. Doit-on rejeter au seuil de 5 % l'hypothèse formulée par le gérant ?

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé précise :

« La clientèle du magasin est composée de 42 % de femmes » donc $P(F)=0,42$.

Et la probabilité que la personne qui entre, dans le magasin, soit un homme est $P(\bar{F})=1-0,42=0,58$

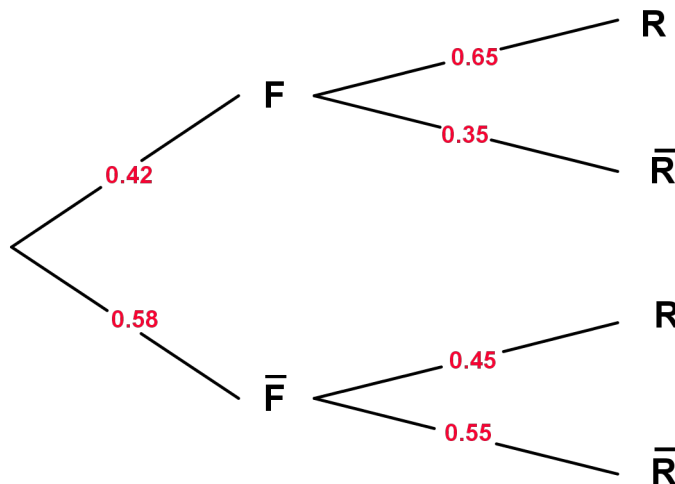
« 35 % des femmes qui entrent dans le magasin effectuent un achat » donc $P_F(\bar{R})=0,35$.

Et $P_F(R)=1-P_F(\bar{R})=1-0,35=0,65$

« 55 % des hommes qui entrent dans le magasin effectuent un achat » donc $P_{\bar{F}}(\bar{R})=0,55$.

Et $P_{\bar{F}}(R)=1-P_{\bar{F}}(\bar{R})=1-0,55=0,45$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. On demande de calculer $P(F \cap R)$

$$P(F \cap R) = P(F) \times P_F(R) = 0,42 \times 0,65 = 0,273.$$

3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :

$$P(R) = P(F \cap R) + P(\bar{F} \cap R) = 0,273 + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R) = 0,273 + 0,58 \times 0,45 = 0,273 + 0,261$$

$$P(R) = 0,534$$

Partie B

La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 48 et d'écart type 10.

1. On utilise la calculatrice pour calculer $P(36 \leq X)$

On obtient : $P(36 \leq X) = 0,885$.

2. Sachant que $(36 \leq X)$, on doit calculer la probabilité d'avoir $(X \leq 60)$.

$$\text{Soit } P_{(36 \leq X)} = \frac{P((36 \leq X) \cap (X \leq 60))}{P(36 \leq X)} = \frac{P(36 \leq X \leq 60)}{P(36 \leq X)}.$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$P_{(36 \leq X)}(X \leq 60) = \frac{0,76986}{0,884930} = 0,870.$$

Partie C

1. On suppose que 30 % des personnes venant au magasin achète uniquement des accessoires donc $p=0,3$.

$$n = 1500 \geq 30 ; np = 450 \geq 5 ; n(1-p) = 1050 \geq 5$$

On peut donc considérer l'intervalle de fluctuation asymptotique

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

$$I = \left[0,3 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{1500}} ; 0,3 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{1500}} \right]$$

$$1,96 \times \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{1500}} = 0,023 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$I = [0,277 ; 0,323]$$

2. La proportion constatée dans l'échantillon de 1500 personnes est : $f = \frac{430}{1500} = 0,287 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$

0,287 appartient à l'intervalle I, donc on ne doit pas rejeter au seuil de 5 %, l'hypothèse formulée par le gérant.