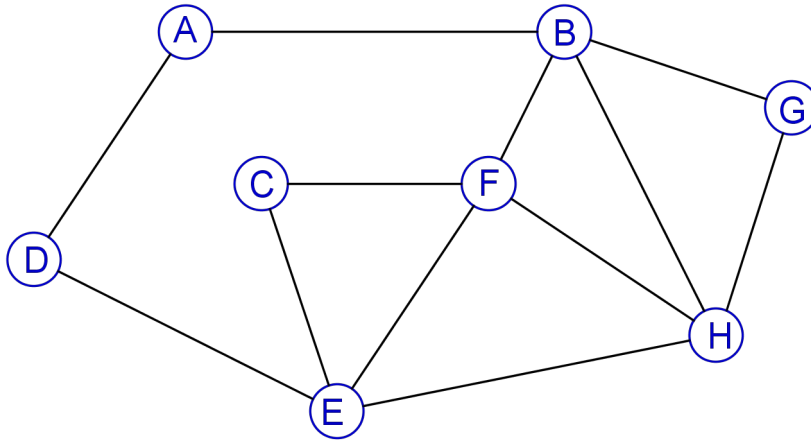


Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère le graphe G ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :

- est connexe
- admet une chaîne eulérienne.

2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Donner en, justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

Partie B

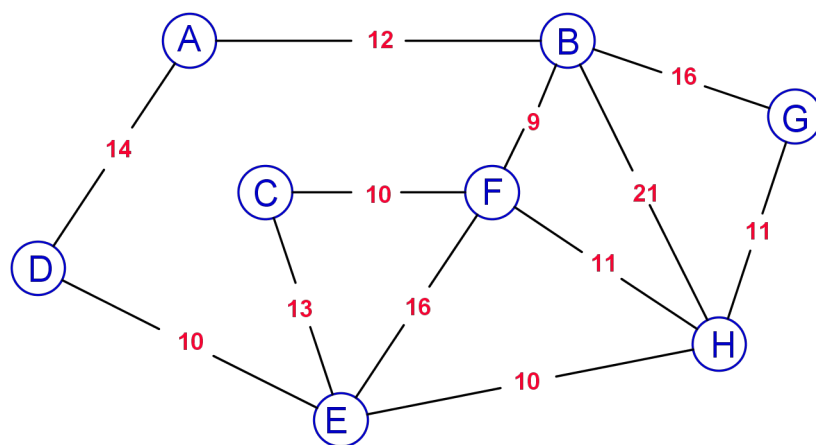
Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. A cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.

Le graphe G de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :

- un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;
- des itinéraires de trois jours, (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?

2. Le graphe G est complété ci-après par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.



Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H.
Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres.

CORRECTION

Partie A

1.a. Le graphe G est connexe car il existe au moins une chaîne reliant tous les sommets par exemple ABGHFCED.

b. Théorème d' Euler

- Un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
- Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si le degré, de tous les sommets, est pair.
- On détermine le degré de tous les sommets et on donne les résultats sous forme de tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H
2	4	2	2	4	4	2	4

Donc le graphe G admet au moins un cycle eulérien, à fortiori une chaîne eulérienne.

2. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique.

Les coefficients de la matrice M^3 sont les nombres de chaînes de longueur 3 reliant deux sommets du graphe (distincts ou non distincts).

Par exemple pour la 2^{ème} ligne (ou la 2^{ème} colonne) :

5 est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant **B à A** (ou **A à B**)

4 est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant **B à C** (ou **C à B**)

2 est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant **B à D** (ou **D à B**)

5 est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant **B à E** (ou **E à B**)

On peut déterminer ces cinq chaînes

BADE	EDAB
BGHE	EHGB
BHFE	EFHB
BFHE	EHFB
BFCE	ECFB

Partie B

1.a. Nous avons vu qu'il existe au moins un cycle eulérien.

La réponse est **oui**.

Exemple : **ABGHBFHEFCEDA**

b. En utilisant la partie A

La réponse est 5.

2. On utilise l'algorithme de DIJKSTRA

A	B	C	D	E	F	G	H
A(0)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
A(0)	A(12)	∞	A(14)	∞	∞	∞	∞
	A(12)	∞	A(14)	∞	B(21)	B(28)	B(33)
		∞	A(14)	D(24)	B(21)	B(28)	B(33)
		F(31)		D(24)	B(21)	B(28)	F(32)
		F(31)		D(24)		B(28)	F(32)
		F(31)				B(28)	F(32)
		F(31)					F(32)
							F(32)
							F(32)

Le chemin le plus court est : ABFH de distance : 32 kilomètres.

