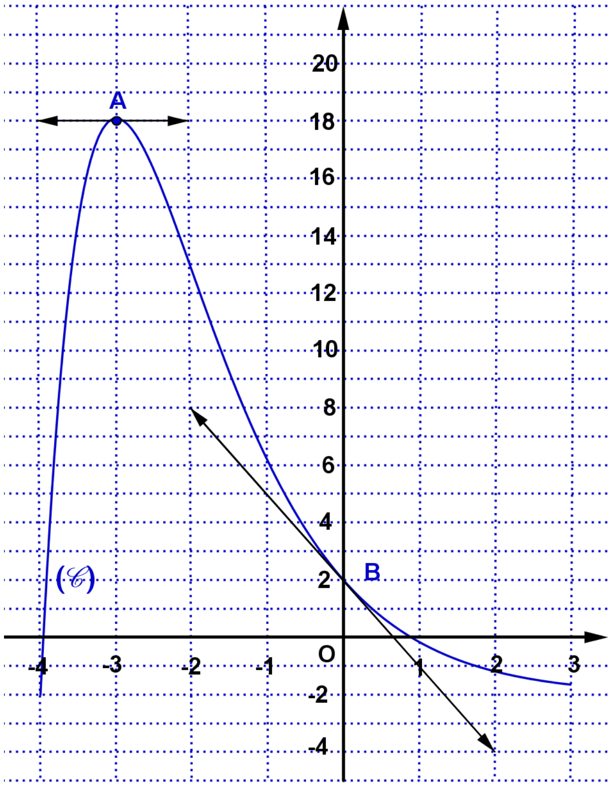
## *Exercice 3* *6 points*

La courbe ( $\mathscr{C}$ ) ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [-4;3]. Les points A d'abscisse -3 et $B(0;2)$ sont sur la courbe ( $\mathscr{C}$ ).
Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe ( $\mathscr{C}$ ) respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note $f'$ la fonction dérivée de f.




**Les parties A et B sont indépendantes**
**Partie A**

**1.** Par lecture graphique, déterminer :
**a.** $f'(-3)$
**b.** $f(0)$ et $f'(0)$

**2.** La fonction f est définie sur [-4;3] par : $f(x)=a+(x+b)e^{-x}$
où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.
**a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de [-4;3].
**b.** A l'aide des questions 1.b. et 2.a. montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :
$$\begin{cases} a+b=2 \\ 1-b=-3 \end{cases}$$
**c.** déterminer les valeurs des nombres a et b.

**Partie B**
On admet que la fonction f est définie sur [-4;3] par : $f(x)=-2+(x+4)e^{-x}$ .

**1.** Justifier que, pour tout réel x de [-4;3], $f'(x)=(-x-3)e^{-x}$ en déduire le tableau de variation de f sur [-4;3].

**2.** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur [-3;3], puis donner une va-leur approchée de $\alpha$ à 0,01 près par défaut.

**3.** On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe ( $\mathscr{C}$ ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-3$ et $x=0$ .

**a.** Exprimer, en justifiant, cette aire à l'aide d'une intégrale.

**b.** Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

| | |
|---|---|
| 1 | F(x):=-2x+(-x-5)*1exp(-x) |
| | / / Interprète F |
| | / / Succès lors de la compilation F |
| | x ⟶ -2*x+(-x-5)*exp(-x) |
| 2 | derive (F(x)) |
| | -exp(-x)-exp(-x)*(-x-5)-2 |
| 3 | simplifier(-exp(-x)-exp(-x)*(-x-5)-2) |
| | x*exp(-x)+4*exp(-x)-2 |

A l'aide de ces résultats, calculer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ puis sa valeur arrondie au centième.

**CORRECTION**

**Partie A**

**1.a.** La tangente au point A d'abscisse -3 est horizontale à ( $\mathscr{C}$ )est honrizontale donc $f'(-3)$ qui est le coefficient directeur, de cette tangente ,est nul.
$f'(-3)=0$ .

**b.** $B(0;2)$ est un point de ( $\mathscr{C}$ ) donc $f(0)=2$ .
La tangente au point B à ( $\mathscr{C}$ ) passe par les points de coordonnées $(-2;8)$ et $(2;-4)$ , $f'(0)$ est le coefficient directeur de cette tangente donc $f'(0)=\dfrac{8+4}{-2-2}=\dfrac{12}{-4}=-3$ .
$f'(0)=-3$ .

**2.** Pour tout nombre réel de l'intervalle [-4;3] : $f(x)=a+(x+b)e^{-x}$ .

**a.** $(e^u)'=u'\times e^u$ donc $(e^{-x})'=-e^{-x}$ $(u(x)=-x)$
donc $f'(x)=1\times e^{-x}+(x+b)\times(-e^{-x})$
$f'(x)=(-x-b+1)e^{-x}$

**b.** $f(0)=2=a+(0+b)e^0=a+b$
$f'(0)=-3=(0-b+1)e^0=-b+1$
donc $\begin{cases} a+b=2 \\ 1-b=-3 \end{cases}$

**3.** $1-b=-3 \Leftrightarrow b=4$
et $a+4=2 \Leftrightarrow a=-2$
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-4;3] : $f(x)=-2+(x+4)e^{-x}$

**Partie B**

**1.** Nous avons vu que : $f'(x)=(-x-b+1)e^{-x}$ et $b=4$
donc $f'(x)=(-x-3)e^{-x}$
Pour tout x de l'intervalle [-4;3] : $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(-x-3)$ .
$(-x-3)\geqslant 0 \Leftrightarrow -3\geqslant x$
On peut dresser le tableau de variation de f

| x | -4 | | -3 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | − | 0 | + | |
| f(x) | -2 | ↗ | f(-3) | ↘ | f(3) |

$f(-3)=-2+e^3=18{,}09$ à $10^{-2}$ près
$f(3)=-2+7e^{-3}=-1{,}65$ à $10^{-2}$ près

**2.** f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur [-3;3] et $f(-3)>0$ et $f(3)<0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires, nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ appartenant à [-3;3].
Par lecture graphique (abscisse du point d'intersection de ( $\mathscr{C}$ )sur [-3;3] et l'axe des abscisses) :
$0<\alpha<1$ .
En utilisant la calculatrice

$f(0)=2>0$ et $f(1)=-0,161<0$
$f(0,9)=-0,008<0$
$f(0,8)=0,157>0$
$0,8<\alpha<0,9$
$f(0,89)=0,008>0$
donc $0,89<\alpha<0,9$
0,89 est une valeur approchée de $\alpha$ à 0,01 près par défaut.

**3.a.** f est continue et positive sur [-3;0] donc l'aire en U.A. de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-3$ et $x=0$ est $\mathscr{A}=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$ .

**b.** Le logiciel de calcul formel précise que la fonction F définie par $F(x)=-2x+(-x-5)e^{-x}$ est une primitive de f.
Donc $\mathscr{A}=F(0)-F(-3)=-5-(6-2e^3)=-11+2e^3$
$\mathscr{A}=29,17$ à $10^{-2}$ près.