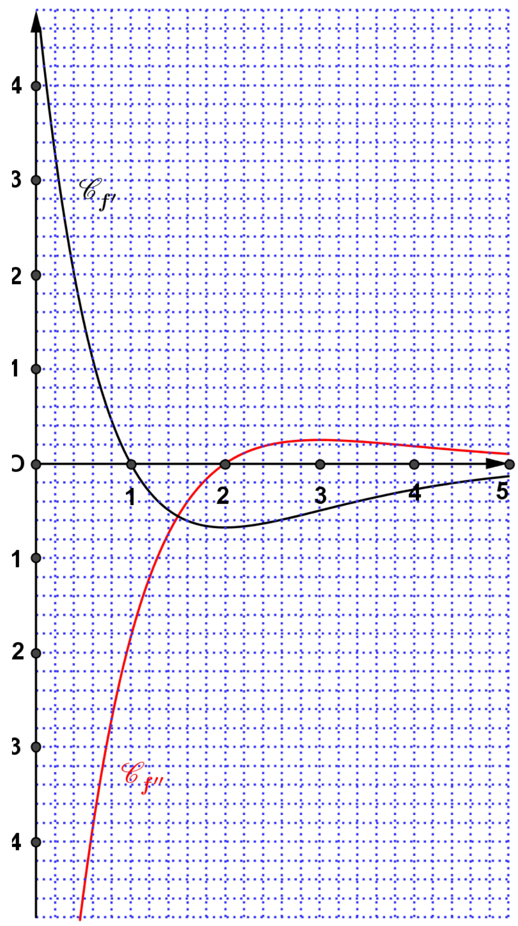
Exercice 2 — 5 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle [0;5].

Partie A – A l'aide du graphique

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $\mathscr{C}_{f''}$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0;5]$.
Le point A de coordonnées $(1;0)$ appartient à $\mathscr{C}_{f'}$ et le point B de coordonnées $(2;0)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_{f''}$.



1. Déterminer le sens de variation de la fonction f. Justifier.
2. Déterminer sur quel(s) intervalle(s), la fonction f est convexe. Justifier.
3. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion ? Justifier. Si oui, préciser leurs) abscisse(s).

Partie B – Etude de la fonction

La fonction f est définie sur [0;5] par : $f(x)=5xe^{-x}$.

1. Justifier que la fonction f est positive sur l'intervalle [0;5].
2. Montrer que lafonction F définie sur [0;5] par $F(x)=(-5x-5)e^{-x}$ est une primitive de f sur l'intervalle [0;5].
3. Déterminer alors la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

CORRECTION

Partie A

1. Sur [0;1[la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ est au dessus de l'axe des abscisses donc $f'(x)>0$ sur cet intervalle et la fonction f est croissante sue [0;1[.
Sur]1;5] la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ est en dessous de l'axe des abscisses donc $f'(x)<0$ sur cet intervalle et la fonction f est décroissante sur]1;5].

2. Sur [0;2[la courbe $\mathscr{C}_{f''}$ est en dessous de l'axe des abscisses donc $f''(x)<0$ sur cet intervalle et la fonction f est concave sur [0;2[.
Sur]2;5] la courbe $\mathscr{C}_{f''}$ est au dessus de l'axe des abscisses donc $f''(x)>0$ sur cet intervalle et la fonction f est convexe sur]2;5].
<u>Conclusion</u>
f est convexe sur]2;5].

3. $f''(2)=0$ et f'' change de signe en $x_0=2$.
<u>Conclusion</u>
Le point d'abscisse 2 est le point d'inflexion de la courbe représentative de f.

Partie B

Pour tout nombre réel x de [0;5] $f(x)=5xe^{-x}$.

1. Pour tout nombre réel x de [0;5] : $e^{-x}>0$ et $x\geqslant 0$ donc f est positive ou nulle sur [0;5].

2. Pour tout nombre réel x de [0;5] : $F(x)=(-5x-5)e^{-x}$.

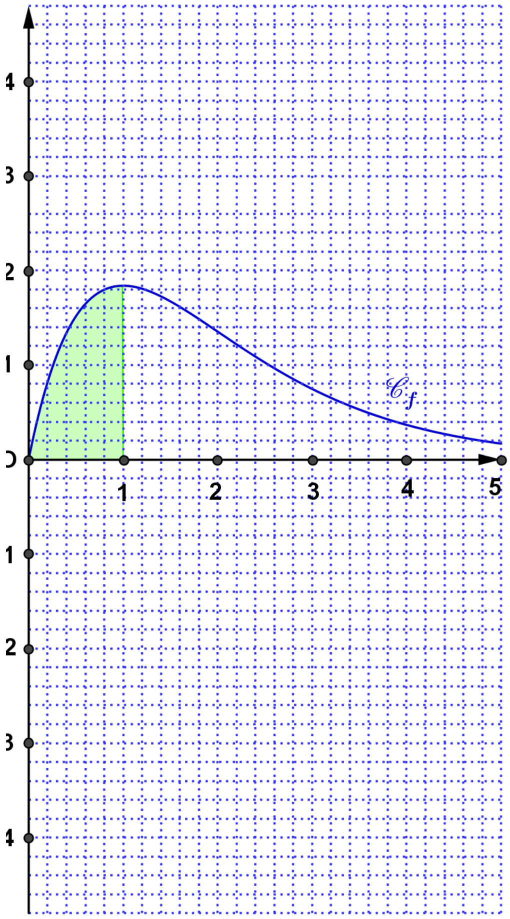
F est dérivable sur [0;5]
$(-5x-5)'=-5$ et $(e^{-x})'=-e^{-x}$

donc $F'(x)=-5e^{-x}+(-5x-5)(-e^{-x})=-5e^{-x}+(5x+5)e^{-x}$
$F'(x)=(-5+5x+5)e^{-x}=5xe^{-x}=f(x)$

F est une primitive de f sur [0;5].

3. f est continue (car dérivable) et positive sur [0;5] donc l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est : $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Sur la figure suivante (non demandée), cette partie est colorée en vert.



$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = -10e^{-1} - (-5e^0) = 5 - \frac{10}{e} \text{ U.A.}$$

