

Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans une ville, un opéra décide de proposer à partir de 2014 un abonnement annuel pour ces spectacles. L'évolution du nombre d'abonnés d'une année à la suivante est modélisée par le directeur de l'opéra qui prévoit que 75 % des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il aura chaque année 300 nouveaux abonnés.

Ainsi, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'abonnés pour l'année $2014+n$.
 Pour l'année 2014, il y a 500 abonnés, autrement dit $u_0=500$.

1. Calculer u_1 et u_2 . Arrondir à l'entier.
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=0,75 u_n + 300$
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1200$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,75 et préciser v_0 .
 - b. En déduire alors que pour tout entier naturel n , $u_n = -700 \times 0,75^n + 1200$
 - c. Calculer u_{10} (arrondir à l'entier). Donner une interprétation concrète de la valeur trouvée.
4. On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnements sera supérieur à 1190.
 On propose trois Algorithmes :

Algorithme 1

```

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que U ≤ 1190
    Affecter à n la valeur n+1
    Affecter à U la valeur  $-700 \times 0,75^n + 1200$ 
Fin Tant que
Affecter à n la valeur n+2014
Afficher n
    
```

Algorithme 2

```

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que U ≤ 1190
    Affecter à U la valeur  $-700 \times 0,75^n + 1200$ 
    Affecter à n la valeur n+1
Fin Tant que
Affecter à n la valeur n+2014
Afficher n
    
```

Algorithme 3

```

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que U ≤ 1190
    
```

Affecter à n la valeur $n+1$

Affecter à U la valeur $-700 \times 0,75^n + 1200$

Affecter à n la valeur $n+2014$

Fin Tant que

Afficher n

Parmi ces trois algorithmes, déterminer lequel convient pour répondre au problème posé et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

CORRECTION

1. Pour la première année, 75 % des abonnés renouvellent leur abonnement, soit ; $500 \times \frac{75}{100} = 375$

et il y a 300 nouveaux abonnés donc : pour $n = 1$ (année $2014+1=2015$)

$$u_1 = 375 + 300 = \mathbf{675}.$$

Pour la deuxième année, 75 % des abonnés de l'année précédente, renouvellent leur abonnement, soit

$$675 \times \frac{75}{100} = 506 \text{ (arrondi à l'unité) et il y a 300 nouveaux abonnés donc ; pour } n = 2$$

(en $2014+2=2016$) $u_2 = 506 + 300 = \mathbf{806}.$

2. Pour la $(n+1)^{ième}$ année, 75 % des abonnés de la $n^{ième}$ année, renouvellent leur abonnement

$$\text{soit } u_n \times \frac{75}{100} = 0,75 u_n \text{ et il y a 300 nouveaux abonnés donc : } u_{n+1} = 0,75 u_n + 300 .$$

3. Pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 1200$ (donc $u_n = v_n + 1200$).

$$\mathbf{a.} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 1200 = 0,75 u_n + 300 - 1200 = 0,75 (v_n + 1200) - 900 = 0,75 v_n + 900 - 900$$

$$v_{n+1} = 0,75 v_n$$

(v_n) est la suite géométrique de raison : **0,75** et de premier terme : $v_0 = u_0 - 1200 = 500 - 1200$

$$v_0 = \mathbf{-700}.$$

b. Pour tout entier naturel n

$$v_n = v_0 \times q^n = -700 \times 0,75^n$$

$$u_n = v_n + 1200 = -700 \times 0,75^n + 1200$$

$$\mathbf{c.} \quad u_{10} = -700 \times 0,75^{10} + 1200$$

En utilisant la calculatrice et en arrondissant à l'entier, on obtient :

$$u_{10} = \mathbf{1161}$$

Pour l'année $2014+10=2024$ il y aura 1161 abonnés au théâtre.

4. Remarque préliminaire

$$0 < 0,75 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1200.$$

Donc « à long terme » le nombre d'abonnés sera voisin de 1200. On peut aussi démontrer que la suite (u_n) est croissante.

L'exercice propose un algorithme déterminant la plus petite valeur de n telle que : $1190 < u_n$.

Si on compare les trois algorithmes, on ne change que l'ordre des instructions.

. pour l'algorithme 3 :

l'instruction « Affecter à n la valeur $n+2014$ » est avant l'instruction « Fin de Tant que ».

Conséquence

1^{ère} boucle

$$n : 0+1=1$$

$$U : 675$$

$$n : 2014+1=2015$$

2^{ème} boucle

$$n : 2015+1=2016$$

$$U : 806(,25)$$

$$n : 2014+2016=4030$$

donc cet algorithme ne permet pas de répondre à la question posée.

. pour l'algorithme 2

1^{ère} boucle

$$U : 500 \quad (u_0)$$

$$n : 0+1=1$$

2^{ème} boucle

$$U : 675 \quad (u_1)$$

$$n : 1+1=2$$

Il y a un décalage pour les indices.

• Pour l'algorithme 1

1^{ère} boucle

$$n : 0+1=1$$

$$U : 675 \quad (u_1)$$

2^{ème} boucle

$$n : 1+1=2$$

$$U : 806(,25) \quad (u_2)$$

Conclusion

C'est l'algorithme 1 qui permet d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre des abonnés sera supérieur à 1190.

Remarque

Dans cet exercice, on ne nous demande pas d'utiliser l'algorithme pour répondre à la question.

(On peut aussi répondre à la question en effectuant la résolution d'une inéquation.)

Ici on utilise un tableur pour visualiser les résultats.

$$A1 : 0$$

$$B1 : 2014$$

$$C1 : 500$$

$$A2 : =A1+1$$

$$B2 : =B1+1$$

$$C2 : =0,75*C1+300$$

Puis on étire jusque : A16, B16 et C16.

On obtient en 2029 il y aura 1191 abonnés

	A	B
1	0	1900
2	1	1913
3	2	1926.26
4	3	1939.79
5	4	1953.58
6	5	1967.65
7	6	1982.01
8	7	1996.65
9	8	2011.58
10	9	2023.81
11	10	2042.35
12	11	2058.19
13	12	2074.36
14	13	2090.84
15	14	2107.66