Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans une société d'assurance, les clients peuvent choisir de payer leur cotisation chaque mois (paiement mensuel) ou en une seule fois (paiement annuel).
On constate que 30 % de ceux qui paient en une fois choisissent le paiement mensuel l'année suivante, alors que 85 % de ceux qui paient chaque mois conservent ce mode de paiement l'année suivante.
En 2014, 60 % des clients paient en une seule fois et 40 % paient mensuellement.
Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel.
On note :
. a_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une seule fois pour l'année 2014+n.
. b_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie mensuellement pour l'année 2014+n.
On a $a_0=0,6$ et $b_0=0,4$ et on note P_n l'état probabiliste pour l'année 2014+n.
Ainsi $P_0=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.
On note :
. A l'état « le client paie en une fois »
. B l'état « le client paie mensuellement ».

1. Représenter un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Ecrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3. Déterminer la probabilité qu'un client paie en une seule fois durant l'année 2018 (arrondir au millième).

4. Déterminer l'état stable et en donner une interprétation.

5. Pour tout entier naturel n, justifier que $a_{n+1}=0,5\,a_n+0,15$.

6. On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $a_n<0,3334$
a. Ecrire un algorithme permettant de déterminer cet entier n.
b. On admet que pour tout entier naturel n

$$a_n=\frac{4}{15}\times 0,55^n+\frac{1}{3}$$

Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $a_n<0,3334$.

CORRECTION

1. A est l'état « le client paie en une seule fois ».
B est l'état « le client paie mensuellement ».

. « 30ù des clients payant en une seule fois une année, choisissent le paiement mensuel l'année sui-vante » donc 70 % des clients payant en une seule fois une année conservent ce mode de paiement l'année suivante.

Conséquence

Le poids de l'arête AB est la probabilité qu'un client ayant payé en une fois une année, choisit le paiement mensuel l'année suivante, cette probabilité est : 0,3.

Le poids de l'arête AA est la probabilité qu'un client ayant payé en une fois une année, conserve ce mode de paiement l'année suivante, cette probabilité est : 0,7.

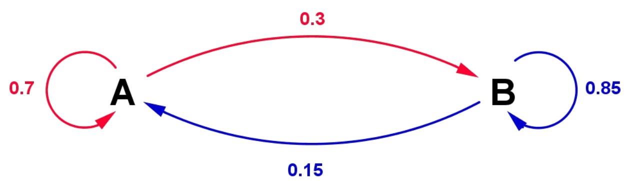
. 85 % des clients ayant payé mensuellement une année, conservent ce mode de paiement l'année suivante » donc 15 % des clients ayant payé mensuellement une année choisissent le paiement mensuel l'année suivante.

Conséquence

Le poids de l'arête BB est la probabilité qu'un client ayant payé mensuellement une année , conser-ve ce mode de paiement l'année suivante, cette probabilité est : 0,85.

Le poids de l'arête BA est la probabilité qu'un client ayant payé mensuellement une année, choisit de payer en une seule fois l'année suivante, cette probabilité est : 0,015.

. On obtient le graphe probabiliste suivant :



2. Dans cet exercice on utilise les matrices lignes et les sommets sont classés dans l'ordre alphabé-tique.

La matrice de transition ; $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA donc 0,7.
m_{12} est le poids de l'arête AB donc 0,3.
m_{21} est le poids de l'arête BA donc 0,15.
m_{22} est le poids de l'arête BB donc 0,85.

$$M=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

3. $P_0=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$
$2018=2014+4$
et $P_4=\begin{pmatrix} a_4 & b_4 \end{pmatrix}=P_0 M^4$
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$M^4=\begin{pmatrix} 0,3943375 & 0,6056625 \\ 0,30283125 & 0,69716875 \end{pmatrix}$
et $P_4=\begin{pmatrix} 0,357735 & 0,642265 \end{pmatrix}$
et $a_4=0,358$ à 10^{-3} près.

4. $P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ est l'état stable si et seulement si $a+b=1$ et $P=PM$.

$P=PM \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}7a+0{,}15b=a \\ 0{,}3a+0{,}85b=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}3a+0{,}15b=0 \\ 0{,}3a-0{,}15b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{0{,}3a-0{,}15b=0$

$\Leftrightarrow \{30a-15b=0 \Leftrightarrow \{2a-b=0$

On résout : $\begin{cases} 2a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$

On obtient $3a=1$ et $a=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{2}{3}$

$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est l'état stable.

Interprétation

Pour tout entier naturel n, $P_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$

a_n est la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une fois l'année 2014+n.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\frac{1}{3}$ (et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\frac{2}{3}$).

Dans un avenir lointain, un tiers des clients choisiront le paiement en une seule fois et deux tiers des clients le paiement mensuel.

5. Pour tout entier naturel n

$P_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ $\qquad P_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$

$a_n+b_n=1$ $\qquad a_{n+1}+b_{n+1}=1$

On a : $P_{n+1}=P_nM$

$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}7a_n+0{,}15b_n & 3a_n+0{,}85b_n \end{pmatrix}$

donc $a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}15b_n$ or $b_n=1-a_n$

$a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}15(1-a_n)=0{,}7a_n+0{,}15-0{,}15a_n=0{,}55a_n+0{,}15$

6.a. **Variables :** a est un nombre réel
n est un entier naturel

Initialisation : Affecter la valeur 0 à n
Affecter la valeur 0,6 à a

Traitement : Tant que $a\geqslant 0{,}3334$ faire
Affecter àn la valeur n+1
Affecter à a la valeur 0,55a+0,15
Fin Tant que

Sortie : Afficher n.

b. On admet que pour tout entier naturel n : $a_{n+1}=\frac{4}{15}\times 0{,}55^n+\frac{1}{3}$

On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n<0{,}3334$

On résout :

$$\frac{4}{15}\times 0{,}55^n+\frac{1}{3}<0{,}3334 \Leftrightarrow 4\times 0{,}55^n+5<15\times 0{,}3334 \Leftrightarrow 4\times 0{,}55^n<15\times 0{,}3334-5$$

$$\Leftrightarrow 0{,}55^n<\frac{15\times 0{,}3334-5}{4}$$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}55^n)<\ln\left(\frac{15\times 0{,}3334-5}{4}\right) \Leftrightarrow n\ln(0{,}55)<\ln\left(\frac{15\times 0{,}3334-5}{4}\right)$$

$0<0{,}55<1$ donc $\ln(0{,}55)<0$ $\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln\left(\frac{15\times 0{,}3334-5}{4}\right)}{\ln(0{,}55)}$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $n \geqslant 13{,}873$
n est un entier naturel donc **n=14.**

Remarque

On joint une étude (non demandée) en utilisant un tableur pour visualiser les résultats

A1 : 0 B1 : 0,6

A2 : =A1+1 B2 : =B1x0,55+0,15

	A	B
1	0	0.6
2	1	0.48
3	2	0.414
4	3	0.3777
5	4	0.357735
6	5	0.34675425
7	6	0.34071484
8	7	0.33739316
9	8	0.33556624
10	9	0.33556143
11	10	0.33400879
12	11	0.33370483
13	12	0.33353766
14	13	0.33344571
15	14	0.33339514