Exercice 4 3 points

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2x^2\ln(x)$ sur [0,2;10] et on note ($\mathscr{C}_f$) sa courbe représentative dans un repère du plan.
Le but de cet exercice est de prouver que la courbe ($\mathscr{C}_f$) admet une seule tangente passant par l'origine du repère.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0,2;10], $f'(x)=2x(2\ln(x)+1)$.

2. Soit a un réel de [0,2;10], montrer que la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$) au point d'abscisse a à pour équation : $y=2a(2\ln(a)+1)x-2a^2(\ln(a)+1)$.

3. Répondre alors au problème posé.

CORRECTION

f est définie sur l'intervalle [0,2;10] par : $f(x)=2x^2\ln(x)$

1. $u(x)=2x^2$ $u'(x)=4x$

$v(x)=\ln(x)$ $v'(x)=\frac{1}{x}$

$f(x)=u(x)\times v(x)$

f est dérivable sur l'intervalle [0,2;10]

$f'(x)=4x\times\ln(x)+2x^2\times\left(\frac{1}{x}\right)$

$f'(x)=4x\ln(x)+2x=2x(2\ln(x)+1)$

2. a appartient à l'intervalle [0,2;10].
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$) au point A de coordonnées $(a;f(a))$ est : $f'(a)$.

$f(a)=2a^2\ln(a)$ et $f'(a)=2a(2\ln(a)+1)$

Une équation de cette tangente est :

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$y=f'(a)x-af'(a)x-af'(a)+f(a)$

$-af'(a)+f(a)=-2a^2(2\ln(a)+1)+2a^2\ln(a)=-4a^2\ln(a)-2a^2+2a^2\ln(a)=-2a^2(\ln(a)+1)$

Une équation de la tangente à la courbe au point A est :

$y=2a(2\ln(a)+1)x-2a^2(\ln(a+1))$

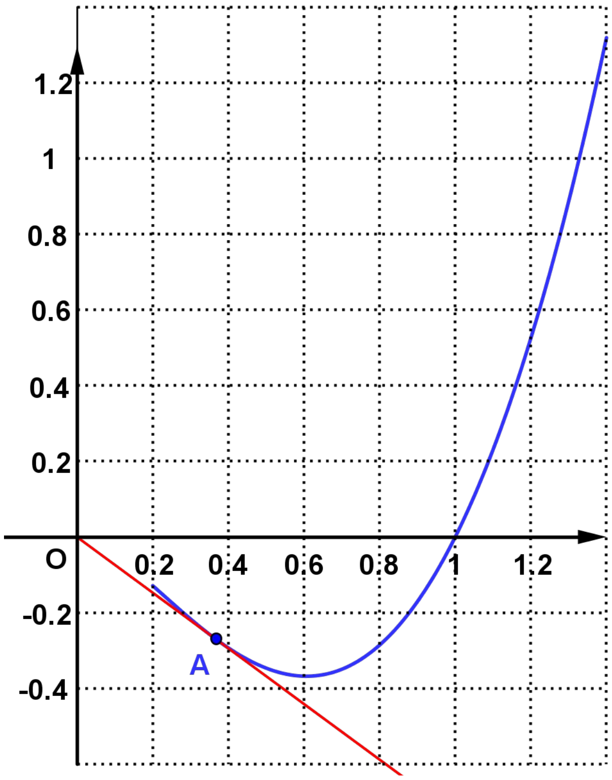
3. Cette tangente passe par l'origine si et seulement si $-2a^2(\ln(a)+1)=0$.
or $a>0$ donc $\ln(a)+1=0$.

$\ln(a)+1=0\Leftrightarrow\ln(a)=-1=\ln(e^{-1})\Leftrightarrow a=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e^2}$ et $f'\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e}$

La tangente à ($\mathscr{C}_f$) au point $A\left(\frac{1}{e};-\frac{2}{e^2}\right)$ a pour équation $y=-\frac{2}{e}x$ (donc passe par l'origine.

On joint une figure non demandée.


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
O
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
-0.2
-0.4
A