Exercice 1 *5 points*

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[1{,}5\,;6]$ par :

$$f(x)=(25x-32)\mathrm{e}^{-x}.$$

On a utilisé un logiciel pour déterminer, sur l'intervalle $[1{,}5\,;6]$, sa fonction dérivée f' et sa fonction dérivée seconde f''.

On note $\mathscr{C}$ la ourbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

On a obtenu les résultats suivants qui pourront être utilisés sans justification dans tout l'exercice.

- $f'(x)=(57-25x)\mathrm{e}^{-x}$
- $f''(x)=(25x-82)\mathrm{e}^{-x}$

1.a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1{,}5\,;6]$.

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1{,}5\,;6]$. (Les valeurs seront, si nécessaire, arrondies au centième).

2. Montrer que, sur l'intervalle $[1{,}5\,;6]$, la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

3. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x)=1$.

a. Justifier que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[4\,;5]$.

b. On écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x)=1$ sur l'intervalle $[4\,;5]$.

Initialisation :	a prend la valeur 4
	b prend la valeur 5
Traitement :	Tant que $\mathrm{b}-\mathrm{a}>0{,}1$ faire,
	y prend la valeur $f\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}\right)$
	Si $\mathrm{y}>1$ alors a prend la valeur $\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}$
	Sinon b prend la valeur $\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}$

Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau donné en annexe.

c. Donner une valeur de α au dixième.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

	$\frac{a+b}{2}$	y à 10^{-3} près	a	b	b-a	Sortie
Initialisation			4	5	1	
$1^{ère}$ boucle Tant que	4.5	0.894	4	4.5	0.5	
$2^{ème}$ boucle Tant que						
$3^{ème}$ boucle Tant que						
$4^{ème}$ boucle Tant que						

CORRECTION

1.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1{,}5;6]$, on a $f'(x)=(57-25x)e^{-x}$.
Pour tout réel x, on a : $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (57-25x).

$$57-25x\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{57}{25}\geqslant x.$$

On donne le résultat sous forme de tableau

x	1.5		$\frac{57}{25}$		6
f '(x)		+	0	-	

b. Tableau de variation de f

x	1.5		$\frac{57}{25}$		6
f '(x)		+	0	-	
f(x)	1.23	↗	2.56	↘	0.29

$$f\left(\frac{57}{25}\right)=25e^{-\frac{57}{25}}=2{,}56 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

$f(1{,}5)=5{,}5e^{-1{,}5}=1{,}23$ à 10^{-2} près

$f(6)=118e^{-6}=0{,}29$ à 10^{-2} près

2. Pour tout nombre réel de l'intervalle $[1{,}5;6]$, on a : $f''(x)=(25x-82)e^{-x}$
Le signe de $f''(x)$ est le signe de (25x-82)

$$25x-82\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{82}{25}$$

On donne le résultat sous forme de tableau

x	1.5		$\frac{82}{25}$		6
f ''(x)		-	0	+	

La fonction dérivée seconde de f est nulle et change de signe pour $x=\frac{82}{25}$ donc le point I de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse $\frac{82}{25}$ est un point d'inflexion de la courbe.

3.a. L'intervalle $[4;5]$ est contenu dans l'intervalle $\left[\frac{57}{25};6\right]$.

$f(4)=1{,}25 ; f(5)=0{,}63$
f est continue et strictement décroissante sur $[4;5]$ et 1 appartient à l'intervalle $[0{,}63;1{,}25]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 1

admet un unique antécédent α appartenant à $[4;5]$, c'est à dire que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α appartenant à $[4;5]$.

b. $1^{ère}$ boucle Tant que :

$\frac{a+b}{2}=\frac{4+5}{2}=4{,}5$ $\quad f(4{,}5)=0{,}894$ à 10^{-3} près

$f(4{,}5)<1$ donc $b=4{,}5$ (et $a=4$)

$b-a=0{,}5>0{,}1$

$2^{ème}$ boucle Tant que :

$\frac{a+b}{2}=\frac{4+4{,}5}{2}=4{,}25$ $\quad f(4{,}25)=1{,}056$ à 10^{-3} près

$f(4{,}25)>1$ donc $a=4{,}25$ (et $b=4{,}5$)

$b-a=0{,}25>0{,}1$

$3^{ème}$ boucle Tant que :

$\frac{a+b}{2}=\frac{4{,}25+4{,}5}{2}=4{,}375$ $\quad f(4{,}375)=0{,}974$ à 10^{-3} près

$f(4{,}375)<1$ donc $b=4{,}375$ (et $a=4{,}25$)

$b-a=0{,}125>0{,}1$

$4^{ème}$ boucle Tant que :

$\frac{a+b}{2}=\frac{4{,}375+4{,}25}{2}=4{,}3125$ $\quad f(14{,}3125)=1{,}016$ à 10^{-3} près

$f(1{,}016)>1$ donc $a=4{,}3125$ (et $b=4{,}375$)

$b-a=0{,}0625<0{,}1$

On donne le résultat sous forme de tableau

	$\frac{a+b}{2}$	y à 10^{-3} près	a	b	b-a	Sortie
Initialisation			4	5	1	
$1^{ère}$ boucle Tant que	4.5	0.894	4	4.5	0.5	
$2^{ème}$ boucle Tant que	4.25	1.059	4.25	4.5	0.25	Non
$3^{ème}$ boucle Tant que	4.375	0.974	4.25	4.375	0.125	Non
$4^{ème}$ boucle Tant que	4.3125	1.016	4.3125	4.375	0.0625	Oui

c. $f(4{,}3125)=1{,}016$ à 10^{-3} près

$f(\alpha)=1$

$f(4{,}375)=0{,}974$ à 10^{-3} près

f est strictement décroissante sur $[4;5]$

donc $4{,}3125<\alpha<4{,}375$

et **4,3** est une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

On ajoute une figure (**non demandée)** montrant les principaux résultats de l'exercice.