

Exercice 2**5 points**

Une entreprise est spécialisée dans la distribution de pommes et la fabrication de jus de pomme. Elle s'approvisionne en pommes auprès de différents producteurs régionaux. L'entreprise dispose d'une machine destinée à tester la conformité des pommes ; celles que la machine accepte seront vendues sans transformation ; les autres serviront à produire du jus de pomme en bouteille. Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : sélection des pommes

Une étude a montré que 86 % des pommes fournies par les différents producteurs sont conformes. Les tests étant réalisés très rapidement, la machine commet quelques erreurs.

- 3 % des pommes effectivement conformes sont rejetés à tort par la machine.
- 2 % des pommes non conformes sont acceptées à tort par la machine.

On prélève au hasard dans le stock de l'entreprise une pomme qui va être traitée par la machine. On note les événements suivants :

- C : « La pomme prélevée est conforme »
- T : « La pomme est acceptée par la machine ».

\bar{C} et \bar{T} sont respectivement les événements contraires des événements C et T.

Pour répondre aux questions suivantes, on pourra représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

1. Déterminer la probabilité que la pomme prélevée soit conforme et soit acceptée par la machine.
2. Montrer que $P(T)$, la probabilité de T, est égale à 0,837.
3. La pomme prélevée est acceptée par la machine. Quelle est la probabilité qu'elle soit conforme ? (On donnera une valeur décimale approchée au millième)

Partie B : contrôle d'un fournisseur

L'entreprise a un doute sur la qualité des pommes fournies par l'un de ses fournisseurs, et elle envisage de s'en séparer.

Elle procède donc à un contrôle en prélevant, au hasard, un échantillon de 80 pommes et en vérifiant manuellement la conformité de chaque pomme.

On formule l'hypothèse que 86 % des pommes de ce fournisseur sont conformes.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de pommes conformes contenues dans un lot de 80 pommes. (Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième)
2. L'entreprise a constaté que seulement 65 pommes de l'échantillon étaient conformes. Quelle décision est-elle amenée à prendre ?

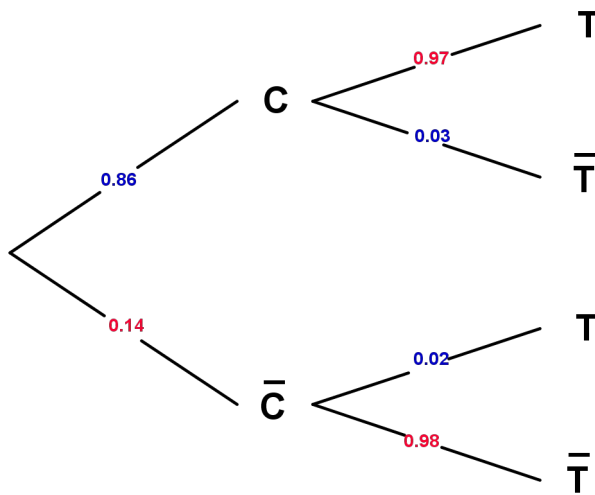
CORRECTION

Partie A : sélection des pommes

L'énoncé précise :

- « 86 % des pommes fournies par les différents producteurs sont conformes »
donc $P(C)=0,86$
conséquence : $P(\bar{C})=1-0,86=0,14$
- « 3 % des pommes effectivement conformes sont rejetées à tort par la machine »
donc $P_C(\bar{T})=0,03$
conséquence : $P_C(T)=1-0,03=0,97$
- « 2 % des pommes non conformes sont acceptées à tort par la machine »
donc $P_{\bar{C}}(T)=0,02$
conséquence : $P_{\bar{C}}(\bar{T})=1-0,02=0,98$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



1. On nous demande de calculer : $P(C \cap T)$
 $P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0,86 \times 0,97 = \mathbf{0,8342}$
2. En utilisant la formule des probabilités totales ou l'arbre pondéré, on obtient :
 $P(T) = P(C \cap T) + P(\bar{C} \cap T)$
 $P(\bar{C} \cap T) = P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(T) = 0,14 \times 0,02 = 0,0028$
 $P(T) = 0,8342 + 0,0028 = \mathbf{0,837}$
3. On nous demande de calculer : $P_T(C)$
 $P_T(C) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{0,8342}{0,837} = \mathbf{0,997}$

Partie B : contrôle d'un fournisseur

1. $n = 80 \geq 30$; $pn = 0,86 \times 80 = 68,8 \geq 5$; $(1-p)n = 0,14 \times 80 = 11,2 \geq 5$
donc on obtient pour intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I_n = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I_{80} = \left[0,86 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,86 \times 0,14}}{\sqrt{80}} ; 0,86 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,86 \times 0,14}}{\sqrt{80}} \right]$$

en utilisant la calculette on obtient :

$$1,96 \times \frac{\sqrt{0,86 \times 0,14}}{\sqrt{80}} = 0,0760 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$I_{80} = [0,784 ; 0,936]$$

2. L'entreprise a constaté que seulement 65 pommes de l'échantillon étaient conformes.

La fréquence obtenue pour cet échantillon est : $f = \frac{65}{80} = 0,8125$

f appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % : I_{80} .

Le contrôle ne met pas en cause la qualité des pommes du fournisseur contrôlé.

Conséquence :

L'entreprise ne doit pas se séparer de ce fournisseur.