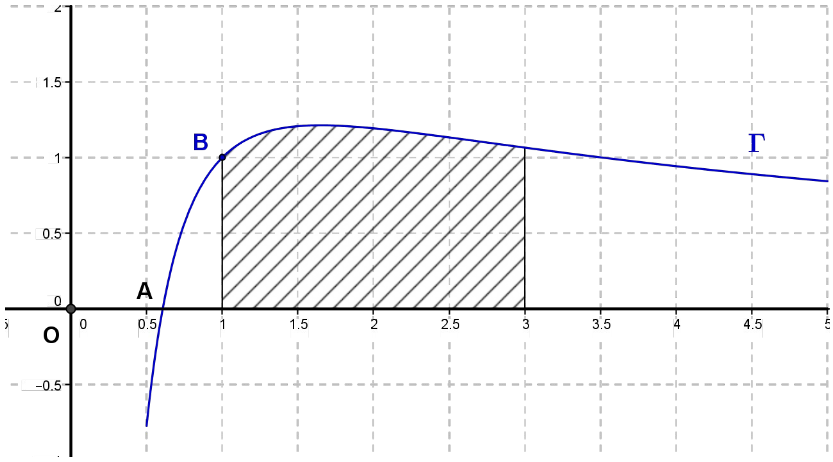
Exercice 3 — 5 points

On considère la fonction g, définie et dérivable sur l'intervalle $[0,5;5]$, et telle que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5;5]$, on a :

$$g(x)=\frac{2\ln(x)+1}{x}.$$

On note g' sa fonction dérivée et Γ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.
Soit B le point de Γ d'abscisse 1 ; la droite (OB) est la tangente en B à la courbe Γ.



1. Déterminer les coordonnées exactes du point A, point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses.

2.a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0,5;5]$, on a $g'(x)=\frac{1-2\ln(x)}{x^2}$.

b. Etudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0,5;5]$.

c. En déduire les variations de g sur l'intervalle $[0,5;5]$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 1.

4.a. On note $\mathscr{D}$ le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.
Par lecture graphique, encadrer par deux entiers l'aire de $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

b. On définit la fonction G sur l'intervalle $[0,5;5]$, par :

$$\mathrm{G}(x)=\ln(x)[\ln(x)+1].$$

c. Déterminer l'aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire.

CORRECTION

1. L'abscisse du point A et la solution de l'équation $g(x)=0$. (On doit obtenir un nombre appartenant à l'intervalle $[0{,}5;5]$.)

$g(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln(x)+1=0 \Leftrightarrow \ln(x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

On obtient en utilisant la calculette :

$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}=0{,}607$ à 10^{-3} près

donc $0{,}5 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \leqslant 5$

<u>conclusion :</u>

Les coordonnées exactes du point A sont : $\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}};0\right)$

2.a. On rappelle que :

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=2\ln(x)+1 \qquad u'(x)=\frac{2}{x}$

$v(x)=x \qquad v'(x)=1$

$g'(x)=\frac{x\times\frac{2}{x}-(2\ln(x)+1)\times 1}{x^2}=\frac{1-2\ln(x)}{x^2}$

b. Le signe de $g'(x)$ est le signe de $1-2\ln(x)$ sur l'intervalle $[0{,}5;5]$.

$1-2\ln(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\geqslant\ln(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\geqslant\ln(x) \Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{e}}\geqslant\ln(x)$

$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}=1{,}649$ à 10^{-3} près

ON donne le signe de $g'(x)$ sous la forme d'untableau

x	0.5		$\sqrt{e}$		5
g '(x)		+	0	-	

c. La fonction g est croissante sur $[0{,}5;\sqrt{\mathrm{e}}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\mathrm{e}};5]$

$g(\sqrt{\mathrm{e}})=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}=1{,}214$ à 10^{-3} près

<u>remarque :</u>

On ne demande pas le tableau de g donc il n'est pas nécessaire de calculer une valeur approchée de $g(0{,}5)$ et de $g(5)$.

3. $g(1)=1$ car $\ln(1)=0$ donc $\mathrm{B}(1;1)$.

La tangente à la courbe Γ au point B est la droite (OB) (résultat donné par l'énoncé).

$\mathrm{O}(0;0)$ et $\mathrm{A}(1;1)$

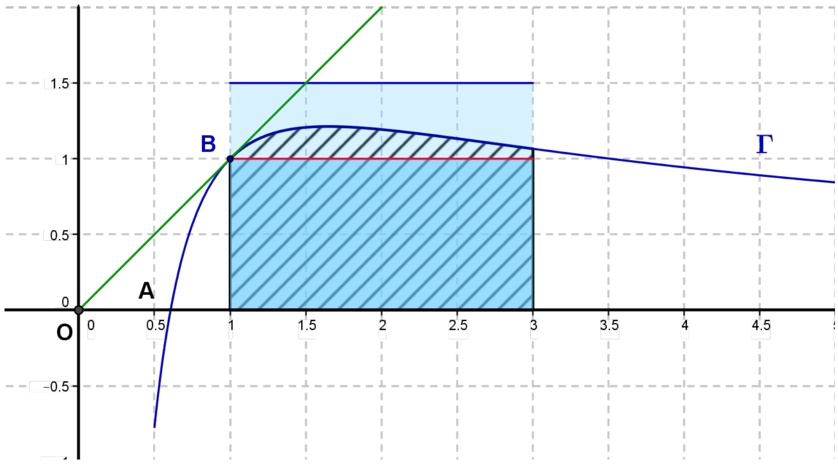
Le coefficient directeur de (OB) est : $\frac{1-0}{1-0}=1$.

La droite passe par l'origine donc l'ordonnée à l'origine est égale à 0.

L'équation de (OB) est donc : $y=x$.

Remarque :
On peut aussi utiliser le nombre dérivé : $g'(1)$.

4.a.



Les aires sont exprimées en unités d'aire
$\mathscr{D}$ est la partie, de plan, hachurée sur le dessin
$\mathscr{D}$ contient un rectangle de longueur : 2 et de largeur : 1 donc l'aire de $\mathscr{D}$ est supérieure à $2\times 1=2$
$\mathscr{D}$ est contenu dans un rectangle de longueur : 2 et de largeur : 1,5 donc l'aire de $\mathscr{D}$ est inférieure à $2\times 1{,}5=3$
conséquence :
L'aire de $\mathscr{D}$ est comprise entre 2 et 3.

b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0{,}5\,;5]$

$u(x)=\ln(x) \qquad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v(x)=\ln(x)+1 \qquad v'(x)=\frac{1}{x}$

$\mathrm{G}(x)=u(x)\times v(x)$

G est dérivable sur $[0{,}5\,;5]$ et

$\mathrm{G}'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

$\mathrm{G}'(x)=\frac{1}{x}\times(\ln(x)+1)+(\ln(x))\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln(x)+1}{x}=g(x)$

G est une primitive de g sur $[0{,}5\,;5]$.

c. g est positive sur l'intervalle $[1\,;3]$ donc l'aire de $\mathscr{D}$ en unités d'aire est :

$\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{G}(3)-\mathrm{G}(1)$

$\mathrm{G}(1)=0$ et $\mathrm{G}(3)=\ln(3)[\ln(3)+1]$

L'aire de $\mathscr{D}$ est : $\mathrm{G}(3)=2{,}306$ à 10^{-3} près.