Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'ensignement de spécialité 5 points

Dans une grande entreprise, les commerciaux ont le choix de services de téléphonie mobile exclusivement entre deux opérateurs concurrents : A et B.
On s'intéresse aux parts de marché de ces deux opérateurs chez les commerciaux de cette entreprise.
Chaque commercial dispose d'un seul abonnement chez l'un ou l'autre des opérateurs : A et B.
Les abonnements sont souscrits pour une période d'un an, à partir du 1^{er} janvier.
Une statistique, menée sur les choix des commerciaux, a révélé que :

- parmi les abonnés de l'opérateur A, 18 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur.
- parmi les abonnés de l'opérateur B, 22 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur.

On admet que les mouvements d'abonnés d'un opérateur à l'autre se poursuivront dans ces proportions dans les années à venir.
De plus on sait qu'au 1^{er} janvier 2014, 40 % des commerciaux avaient souscrit un abonnement chez A et 60 % chez B.
On note, pour tout entier naturel n :

- u_n la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez A au 1^{er} janvier de l'année $2014+n$
- v_n la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez B au 1^{er} janvier de l'année $2014+n$

On a donc $u_0=0{,}4$ et $v_0=0{,}6$

1. Justifier que $u_{n+1}=0{,}82\,u_n+0{,}22\,v_n$ et que $u_n+v_n=1$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}6\,u_n+0{,}22$.

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n, par :
$w_n=u_n-0{,}55$

a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire l'expression de (w_n) en fonction de n.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n=0{,}55-0{,}15\times(0{,}6)^n$.

4. Conjecturer la limite de la suite (u_n) . Comment interpréter ce résultat sur l'évolution des parts de marché dans les années futures ?

CORRECTION

1. 18 % des abonnés de l'opérateur A au 1^{er} janvier $(2014+n)$ choisissent l'opérateur B au 1^{er} janvier $(2014+n+1)$.
Donc 82 % des abonnés de l'opérateur A au 1^{er} janvier $(2014+n)$ sont encore abonnés à l'opérateur A au 1^{er} janvier $(2014+n+1)$.
u_n est la proportion des commerciaux disposant d'un abonnement chez A au 1^{er} janvier $(2014+n+1)$.
Donc $0{,}82\times u_n$ est la proportion des commerciaux ayant conservés un abonnement chez A 1^{er} janvier $(2014+n+1)$.
22 % des abonnés de l'opérateur B au 1^{er} janvier $(2014+n)$ deviennent de l'opérateur A au 1^{er} janvier $(2014+n+1)$.
Donc $0{,}22\times v_n$ est la proportion des commerciaux abonnés chez B au 1^{er} janvier $(2014+n)$ devenant abonnés chez A au 1^{er} janvier $(2014+n+1)$.
u_{n+1} est la proportion des commerciaux abonnés chez A au 1^{er} janvier $(2014+n+1)$.
On obtient : $u_{n+1}=0{,}82\,u_n+0{,}22\,v_n$.
Chaque commercial dispose d'un et un seul abonnement chez A ou B donc $u_n+v_n=1$

2. Pour tout entier naturel n
on a $v_n=1-u_n$
donc $u_{n+1}=0{,}82\,u_n+0{,}22(1-u_n)=0{,}6\,u_n+0{,}22$

3. Pour tout entier naturel n
$w_n=u_n-0{,}55$

a. $w_{n+1}=u_{n+1}-0{,}55=0{,}6\,u_n+0{,}22-0{,}55=0{,}6\,u_n-0{,}33$
or $u_n=0{,}55+w_n$
$w_{n+1}=0{,}6(0{,}55+w_n)-0{,}33=0{,}33+0{,}6\,w_n-0{,}33=0{,}6\,w_n$
$w_{n+1}=0{,}6\,w_n$
donc (w_n) est la suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $w_0=u_0-0{,}55=0{,}4-0{,}55=-0{,}15$.

b. Pour tout entier naturel n
$w_n=w_0\times q^n$
$w_n=-0{,}15\times(0{,}6)^n$

c. Pour tout entier naturel n
$u_n=0{,}55+w_n$
$w_n=0{,}55-0{,}15\times(0{,}6)^n$

4. $0\leqslant 0{,}6<1$ donc la suite géométrique (w_n) converge vers 0 et la suite (u_n) converge vers 0,55.
<u>Interprétation</u>
A long terme, 55 % des commerciaux de la société seront abonnés de l'opérateur A.