Exercice 4 Candidats ayant suivi l'ensignement de spécialité 5 points

Une société est spécialisée dans la vente en ligne de produits de haute technologie sur internet.

Partie A

La société réalise tout au long de l'année des journées promotionnelles pour attirer ses clients sur son site internet. Elle leur envoie un courrier électronique annonçant chaque journée de promotion.
Parmi les clients, 5 % d'entre eux ont visité le site internet de la société lors de la première journée de promotion.

Une étude portant sur le comportement des clients auxquels la société a envoyé ce type de message a mis en évidence que :

- trois clients sur cinq ayant visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visitent à nouveau lors de la journée promotionnelle suivante ;
- un client sur cinq n'ayant pas visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visite lors de la journée promotionnelle suivante.

On choisit au hasard, un client ayant reçu le message annonçant la première journée promotionnelle.
On formule l'hypothèse que les comportements des clients observés lors de l'étude n'évoluent pas d'une journée promotionnelle à la suivante.
Pour tout entier naturel n non nul, on note l'état probabiliste ainsi défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$, où x_n désigne la probabilité que le client, pris au hasard, visite le site internet de la société lors de la $n^{ème}$ journée de promotion.

1. Pour une journée promotionnelle donnée, on note V, l'événement : « le client a visité le site lors de la journée promotionnelle ».
Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets V et $\bar{V}$.

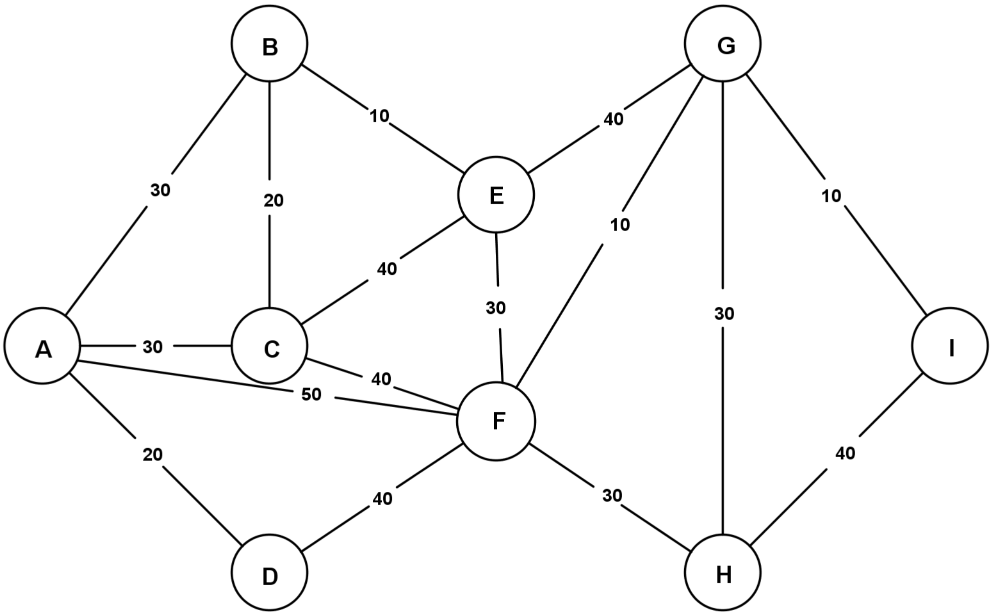
2. Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets V et $\bar{V}$ dans cet ordre.

3. En remarquant que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$, déterminer P_2. Interpréter ce résultat.

4. On admet que le taux de visites se stabilise à long terme.
Montrer que $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable de ce système.

Partie B

Le réseau informatique de cette société est constitué d'un ensemble de routeurs interconnectés à l'aide de fibres optiques haut débit. Le graphe qui suit schématise l'architecture de ce réseau.
Les sommets représentent les routeurs et les arêtes représentent les fibres optiques.
On a fait figurer les durées de transfert des données (en millisecondes) d'un routeur à un autre sur les fibres optiques du réseau de la société.



1. Chaque année la société doit vérifier l'état physique de la fibre optique installée sur le réseau. Un robot inspecte toute la longueur de la fibre optique afin de s'assurer qu'elle ne présente pas de détérioration apparente.
Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en suivant les optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois ? Justifier la réponse.
Si un tel parcours est possible, préciser par quel(s) routeur(s) du réseau le robot doit commencer son inspection.

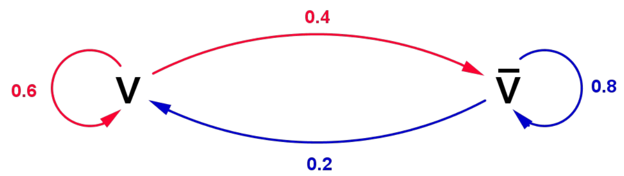
2. Un ordinateur, relié au routeur A envoie un paquet de données à un ordinateur relié au routeur I.
Le paquet de données a mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I.
Ce paquet de données a-t-il emprunté le chemin le plus rapide sur le réseau ?
Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé nous donne :

- $P_V(V)=\frac{3}{5}=0{,}6$ (car trois clients sur cinq, ayant visité le site pour une journée promotionnelle, visitent le site lors de la journée promotionnelle suivante).
  Conséquence :
  $P_V(\bar{V})=1-0{,}6=0{,}4$
- $P_{\bar{V}}(V)=\frac{1}{5}=0{,}2$ (car un client sur cinq, n'ayant pas visité le site pour une journée promotionnelle, le visite lors de la journée promotionnelle suivante).
  Conséquence :
  $P_{\bar{V}}(\bar{V})=1-0{,}2=0{,}8$
- On peut construire l'arbre pondéré suivant :



2. L'ordre des sommets du graphe est : V et $\bar{V}$.
La matrice de transition M associée au graphe probabiliste est une matrice carrée 2×2 .

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

m_{11} est le poids de l'arête VV soit $P_V(V)=0{,}6$
m_{12} est le poids de l'arête $V\bar{V}$ soit $P_V(\bar{V})=0{,}4$
m_{21} est le poids de l'arête $\bar{V}V$ soit $P_{\bar{V}}(V)=0{,}2$
m_{22} est le poids de l'arête $\bar{V}\bar{V}$ soit $P_{\bar{V}}(\bar{V})=0{,}8$

donc $M=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

3. 5 % des clients de la société ont visité le site lors de la première journée de promotion
donc $x_{¿}0{,}05$ et $y_1=1-x_1=0{,}95$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

$$P_2=P_1\times M=\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}05\times 0{,}6+0{,}95\times 0{,}2 & 0{,}05\times 0{,}4+0{,}95\times 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$P_2=\begin{pmatrix} 0{,}03+0{,}19 & 0{,}02+0{,}76 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}78 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

Interprétation :
$x_2=0{,}22$
Il y a 22 % des clients de la société qui visitent le site la deuxième journée de promotion.

4. $P=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est un état stable si et seulement si $P\times M=P$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times 0{,}6+\frac{2}{3}\times 0{,}2 & \frac{1}{3}\times 0{,}4+\frac{2}{3}\times 0{,}8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{0{,}6}{3}+\frac{0{,}4}{3} & \frac{0{,}4}{3}+\frac{1{,}6}{3} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

conclusion :

$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable de ce système.

Partie B

1. Un tel parcours est possible si et seulement si le graphe admet **une chaîne eulérienne**.

Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

On détermine le degré de chaque sommet du graphe.
On donne les résultats sous forme de tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
4	3	4	2	4	6	4	3	2

Il y a deux sommets et deux seulement qui ont un degré impair.
Il existe au moins une chaîne eulérienne.
Pour déterminer une telle chaîne, il faut commencer par un sommet de degré impair soit B ou H et terminer par l'autre sommet de degré impair H ou B.

2. En utilisasant l'algorithme de disjkstra, on détermine le plus court chemin de A à I

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	30(A)	30(A)	20(A)	∞	50(A)	∞	∞	∞
	30(A)	30(A)	20(A)	∞	50(A)	∞	∞	∞
	30(A)	30(A)		40(B)	50(A)	∞	∞	∞
		30(A)		40(B)	50(A)	∞	∞	∞
				40(A)	50(A)	80(E)	∞	∞
					50(A)	60(F)	80(F)	∞
						60(F)	80(F)	70(G)
								70(G)

Le plus court chemin reliant A à I est AFGI : 70 ms.
Donc le paquet de données qui a mis 70ms pour transiter du routeur A au routeur I a emprunté le chemin le plus rapide.